STAATSCOURANT

1 9 3 8

# HANDLEIDING VOOR DE TECHNISCHE WERKZAAMHEDEN VAN HET KADASTER

'S-GRAVENHAGE · ALGEMEENE LANDSDRUKKERIJ · 1938

# HANDLEIDING VOOR DE TECHNISCHE WERKZAAMHEDEN VAN HET KADASTER

'S-GRAVENHAGE · ALGEMEENE LANDSDRUKKERIJ · 1938

# INHOUD

## § 1. RIJKSDRIEHOEKSMETING

De *Rijksdriehoeksmeting*, die in de jaren 1885—1928 werd uitgevoerd en voltooid onder leiding van de Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing, vormt den meetkundigen grondslag, waaraan de metingen voor het Kadaster worden verbonden. De verbinding heeft plaats door ten opzichte van de bekende punten der Rijksdriehoeksmeting nieuwe punten te bepalen, welke, evenals eerstbedoelde punten berekend worden in de *Stereografische Kaartprojectie* met *Amersfoort I*, Stang van den Lievevrouwentoren, als Centrum.

**Rijksdriehoeksmeting**

**Stereografische Projectie**

Dit punt, *centrale punt der kaart* geheeten, is de oorsprong van het rechthoekige *coördinatenstelsel*, met behulp waarvan de ligging van alle punten wordt uitgedrukt. De projectie van den meridiaan over dit punt vormt de *ordinaten-as* ($Y$-as) van het stelsel; loodrecht daarop en eveneens door het centrale punt gaande, staat de *absciss-en-as*, de $X$-as. De positieve tak van de $Y$-as is naar het Noorden gericht, de positieve tak van de $X$-as naar het Oosten. Tusschen de positieve takken van $Y$-as en $X$-as is het eerste kwadrant gelegen. Voortgaande in de draaiingsrichting van de wijzers van een uurwerk (positieve draaiingsrichting) volgen successievelijk het tweede, derde en vierde kwadrant.

**Y-as**

**X-as**

**Kwadranten**

De hoeken met de $Y$-as (argumenten) worden geteld vanaf den positieven tak van de $Y$-as in de positieve draaiingsrichting.

**Argumenten**

De uitkomsten der Rijksdriehoeksmeting zijn neergelegd in de uitgave der Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing: Rijksdriehoeksmeting 1885—1928.

I. Staten van Waarnemingen en Uitkomsten

II. Rechthoekige Coördinaten.

Het archief der Rijkscommissie is met ingang van 1 Januari 1930 ondergebracht bij den op dien datum ingestelden Bijhoudingsdienst der Rijksdriehoeksmeting, die tot opdracht heeft de veranderingen bij te houden, welke sedert de oorspronkelijke bepaling der punten van de Rijksdriehoeksmeting daarin zijn opgetreden of in het vervolg zullen optreden, en die zich tevens tot taak stelt nieuw gebouwde torens, alsook terreinpunten in het Coördinatenstelsel der Stereografische Projectie te bepalen, een en ander op zoodanige wijze, dat de door de Rijksdriehoeksmeting bereikte nauwkeurigheid gehandhaafd blijft.

**Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing**

**Bijhoudingsdienst der Rijksdriehoeksmeting**

De onder leiding van de Rijkscommissie voor Graadmeting vastgestelde punten, benevens die, welke door den Bijhoudingsdienst der Rijksdriehoeksmeting zijn of zullen worden bepaald, worden in het vervolg als R.D.-punten aangeduid.

**R. D.-punten**

In het algemeen zal bij de verbinding van den kadastraal-meetkundigen grondslag aan de R.D. *de aarde* als *plat vlak* kunnen worden beschouwd; bij terreinen van groote uitgestrektheid of in de gevallen, dat de verbindingspunten op grooten afstand zijn gelegen, kan het voorkomen, dat bij de uitvoering van de vereischte berekeningen de vorm der aardoppervlakte, voor ons land te vervangen door den *bol met gemiddelden kromtestraal*, niet mag worden verwaarloosd. In deze gevallen zal men dus de projectie van den boog van den grooten cirkel, die de eindpunten van een zijde op de bolvormige aarde verbindt, niet als een rechte lijn mogen beschouwen. Deze boog is in de kaart eveneens een cirkelboog, behoudens in het geval, dat de groote cirkel op aarde door het centrale punt blijkt te gaan en deze cirkel

**Eigenschappen der Stereografische Projectie**

zich in de kaart als een rechte lijn zal vertoonen. Dit geval daargelaten, zal men in het algemeen rekening moeten houden met de waarde van het hoekje, gevormd tusschen de raaklijn aan de projectie van den boog en de koorde.

**Hoek tusschen boog en koorde**

Noemt men dit hoekje $\varepsilon$, is verder $\psi_R$ het argument van de raaklijn en $\psi_{k'}$ het argument van de koorde, zoo is $\psi_R + \varepsilon = \psi_{k'}$. Bij een zijde $AB$ van 10 km. kan $\varepsilon$ een maximumwaarde van 6 cc verkrijgen; het verschil tusschen de argumenten $AB$ en $BA$ zal dan 12 cc bedragen.

Zijn $X_A$ en $Y_A$; $X_B$ en $Y_B$ de coördinaten van de eindpunten $A$ en $B$ eener lijn, zoo wordt $\varepsilon$ als volgt uitgedrukt:

$$\varepsilon = P\,(X_B - X_A) + Q\,(Y_B - Y_A)$$

$P$ en $Q$ zijn *constanten voor het punt A*; hunne waarden kunnen worden berekend uit de betrekkingen:

$$\log P = \log Y_A + \log c_2 - \log m_A$$
$$\log Q = \log X_A + \log(-c_2) - \log m_A.$$

In deze betrekkingen is $c_2$ een *constante voor de geheele kaart*. Bij sexagesimale verdeeling van den cirkel is

$$\log c_2 = 1{,}102404 - 10;$$

bij centesimale verdeeling is

$$\log c_2 = 1{,}591859 - 10.$$

**Vergrooting der lijnen**

$m_A$ is de *lijnenvergrooting* in het punt $A$. De log van de werkelijke lengte van een lijnelement, vermeerderd met de log vergrooting, is gelijk aan de logarithme van de lengte van het lijnelement in de kaart. De *waarde* van de log vergrooting wordt gevonden uit de betrekking:

$$10^6 \log m_A = 10^6 \log m_0 + c_1 X_A^2 + c_1 Y_A^2$$

$m_0$ is de vergrooting der lijnen in het centrale punt der kaart;

$$10^6 \log m_0 = -40{,}0\ ;$$

$c_1$ in de betrekking voor log $m_A$ is een constante voor de geheele kaart; voor hare waarde geldt:

$$\log c_1 = 1{,}42580 - 10$$

**Berekening der constanten**

Ter berekening van de constanten $10^6 \log m$, log $P$ en log $Q$ kan worden gebruik gemaakt van een formulier, hetwelk als volgt is in te richten:

| | | | Sexagesimaal | Centesimaal |
|---|---|---|---|---|
| $\log c_1$ | 1.42580 | | | |
| $2 \log X$ | | $\log c_2$ | 1.102404 | 1.591859 |
| $2 \log Y$ | | $\log Y$ | | |
| $\log c_1\, XX$ | | $\text{colog}\ m$ | | |
| $\log c_1\, YY$ | | $\log P$ | | |
| $10^6 \log m_0$ | — 40.0 | $\log(-c_2)$ | $1.102404_n$ | $1.591859_n$ |
| $c_1\, XX$ | | $\log X$ | | |
| $c_1\, YY$ | | $\text{colog}\ m$ | | |
| $10^6 \log m$ | | $\log Q$ | | |

**Grafische bepaling van log m en van $\varepsilon$**

De bepaling zoowel van $m$, als van de waarde van het hoekje $\varepsilon$ kan ook langs grafischen weg geschieden met behulp van twee in de bijlagen opgenomen *nomogrammen*.

Meermalen zal het voorkomen, dat men bij de berekeningen ten behoeve van den meetkundigen grondslag rekening moet houden met de vergrooting der lijnen, als gevolg van de kaartprojectie.

Een lijn van 100,00 m lengte, gemeten in de omgeving van het centrale punt Amersfoort, zal in de projectie (de kaart) een lengte hebben van slechts 99,99 m; op sommige plaatsen aan de grenzen van het land kan deze lengte 100,01 m bedragen. Zooals in het vervolg blijken zal, zullen er zich in de practijk gevallen voordoen, dat men deze verschillen in rekening moet brengen, dat men dus de gemeten afstanden zal corrigeeren naar de kaart en omgekeerd de uit de coördinaten der eindpunten berekende lengten zal wijzigen tot de werkelijke lengten.

Berekening der lijnenvergrooting

Wij hebben gezien, dat voor ieder in coördinaten der R.D. bekend punt de vergrooting der lijnen kan worden berekend langs logarithmischen weg onder gebruikmaking van de linkerafdeeling van het vorenstaande formulier; deze bewerking kan natuurlijk op even eenvoudige wijze geschieden met de rekenmachine, terwijl het nomogram de uitkomst onmiddellijk op grafische wijze levert. Als contrôle op die uitkomst zal men in het laatste geval bij omwisseling van ordinaat en abscis hetzelfde bedrag voor log $m$ verkrijgen.

Bij een niet elementaire boog $AB$ zal men zoowel de vergrooting $m_A$ als de vergrooting $m_B$ moeten bepalen; de lengte van de rechte verbindingslijn $A'B'$ in de kaart wordt dan uitgedrukt door de betrekking:

$$\overline{A'B'} = AB\sqrt{m_A m_B}$$

Het verschil in lengte tusschen boog en koorde kan steeds worden verwaarloosd; dit verschil heeft n.l. eerst bij een afstand van ruim 30 km beteekenis en dan nog slechts voor één eenheid van de 6e decimaal der logarithme.

## § 2. HET LEGGEN VAN DEN MEETKUNDIGEN GRONDSLAG. GEBIEDEN. VERZEKERING VAN DEN GRONDSLAG

Ten behoeve van de kaarteering van een te hermeten terrein wordt dit opgemeten ten opzichte van een meetkundigen grondslag, die aan de Rijksdriehoeksmeting wordt verbonden.

Delimitatie

Aan de opmeting gaat vooraf de *delimitatie* en — waar noodig — de aanduiding op het terrein van de op te meten perceelgrenzen; voor de delimitatie worden speciale regelen gesteld, welke hoofdzakelijk van administratieven en juridischen aard zijn, zij vallen daarom buiten het bestek van deze handleiding.

Verbinding van den meetkundigen grondslag

De verbinding van den meetkundigen grondslag aan de R.D. geschiedt in de eerste plaats door middel van driehoeksmeting, waaronder in den meest algemeenen zin wordt verstaan het op trigonometrische wijze bepalen van vaste punten in het verband der R.D.

Ketting of net van driehoeken

Deze bepaling kan geschieden door vereeniging van een aantal nieuwe punten tot een *ketting* of tot een *net van aaneengesloten driehoeken*, hetwelk in zijn geheel wordt verbonden aan twee of meer bekende punten der R.D. Ook kan de verbinding tot stand komen door de nieuwe punten ieder *afzonderlijk* ten opzichte van bekende R.D.-punten te bepalen, hetzij door metingen in het te bepalen punt zelve (Snelliusmeting), hetzij door metingen in de bekende punten, hetzij door metingen uit te voeren zoowel in het nieuwe punt als in de bekende punten. Deze wijze van verbinding, welke in verreweg de meeste gevallen kan worden toegepast, staat bekend onder den naam van „*enkele puntsbepaling*". Aan deze methode kan uitbreiding worden gegeven door in de bepaling niet één punt te betrekken, maar daarin twee

Enkele puntsbepaling

of meer punten tegelijk op te nemen; het op deze wijze uit te breiden vraagstuk wordt *„dubbele"*, resp. *„meervoudige puntsbepaling"* genoemd.

**Dubbele en meervoudige punts-bepaling**

De nieuw te bepalen driehoekspunten worden zoodanig gekozen, dat zij met de vereischte nauwkeurigheid en op geschikte wijze kunnen dienen als uitgangspunten voor de verdere verdichting van den meetkundigen grondslag.

**Veelhoeks-meting**

De eerste verdichting van dien grondslag wordt verkregen door de zooeven bedoelde driehoekspunten te verbinden door afzonderlijke, of tot een net vereenigde veelhoeken, ieder samengesteld uit een gering aantal lange polygoonzijden, welke te zamen de zoogenaamde *hoofdpolygonen* c.q. het hoofdpolygonennet, vormen.

**Hoofd-polygonen**

**Secundaire polygonen**

Een verdere verdichting kan in sommige gevallen worden verkregen door de hoekpunten der hoofdpolygonen te verbinden door *secundaire*, waartoe naar het hoofdstuk „Veelhoeksmeting" wordt verwezen.

Op welke wijze de tot nu toe beschouwde drie- en veelhoekspunten kunnen dienen voor de detailmeting, is hier van secundair belang; primair is de nauwkeurigheid, waarmede genoemde punten worden bepaald.

**Verkenning van het terrein**

De vaststelling van het hierboven bedoelde gedeelte van den meetkundigen grondslag geschiedt na het uitvoeren van een zorgvuldige verkenning van het terrein.

Deze verkenning heeft in de eerste plaats ten doel te geraken tot de meest gunstige ligging van de nieuw te bepalen punten onderling en ten opzichte van de gegeven punten. Hiermede gaat gepaard het instellen van een onderzoek, of de tegenwoordige ligging van laatstgenoemde punten identiek is met de ligging op het tijdstip van hunne bepaling. Het raadplegen van het „Register van Vastleggingen" der R.D. is hierbij noodzakelijk. Wordt *storing* vermoed, zoo wordt, in het geval dat het te onderzoeken driehoekspunt verzekerd is, in het hierna te noemen „plan van uitvoering" een nieuwe bepaling van het centrum door een lokale driehoeksmeting opgenomen, waaromtrent § 4 de methoden aan de hand doet.

Indien getwijfeld wordt of de meetkundige omstandigheden voldoende gunstig zijn, is een onderzoek naar vorm en grootte van de foutenellips aan te bevelen, in welk verband wordt verwezen naar § 21 „Nauwkeurigheid van de uit te voeren metingen". Tevens wordt een onderzoek ingesteld of de te kiezen ligging der hoofdpolygoonpunten voldoet aan de nauwkeurigheidseischen, bij welk onderzoek gemelde § 21 eveneens de noodige richtlijnen geeft.

Er kan niet genoeg op worden gewezen, dat een goede verkenning het werk in aanzienlijke mate ten goede komt, zoowel voor wat betreft de innerlijke waarde der uitkomsten, als de vlotheid der uitvoering.

**Plan van uitvoering met overzichtskaart**

De boven omschreven verkenning wordt vastgelegd in een plan van uitvoering, gevende een opsomming van de uit te voeren metingen en berekeningen. Bij dit stuk wordt gevoegd een overzichtskaart met voorstelling van den ontworpen meetkundigen grondslag.

**Aanduiding der vaste punten op de overzichts-kaart**

Op de overzichtskaart worden de aansluitingspunten der R.D. en de nieuw te bepalen drie- en veelhoekspunten aangeduid. Wat betreft de aansluitingspunten geschiedt de aanduiding door middel van twee concentrische cirkeltjes, bij de overige punten door een enkel cirkeltje; bij laatstgenoemde punten is de onderscheiding in *DP* en *VP* gewenscht.

**Meetlijnen-complex**

Het *meetlijnencomplex* is geheel ingesteld op een zoo doelmatig mogelijk uit te voeren *detailmeting*. De meetlijnen worden daarom zoodanig gekozen, dat de meting van de daarin op te nemen details op de eenvoudigste wijze kan geschieden

en zoo weinig mogelijk hinder ondervindt van het verkeer. Meetlijnen, schuin over een weg vallende, worden daarom steeds gemeden; waar dit noodig is, wordt aan beide kanten van den weg of van de straat een afzonderlijke meetlijn dicht langs en zoo mogelijk evenwijdig aan de bebouwing of de gevellijn gekozen.

**Verbinding van de meetlijn aan den meetkundigen grondslag**

Op welke wijze iedere meetlijn aan den meetkundigen grondslag zal worden verbonden is van bijkomend belang; thans is de *meetlijn primair*; deze moet in de eerste plaats aan bovengenoemde practische eischen voldoen; daarna eerst komt de aansluiting aan de naastbijgelegen polygonen aan de orde, welke aansluiting op de verschillende wijzen kan geschieden, die de practijk voor ieder geval wel aanwijst. Menigmaal zal daarvoor de voerstraal-methode worden gekozen, waarbij wordt uitgegaan van reeds bepaalde punten, hetzij van de driehoekspunten, hetzij van de hoekpunten der hoofd- of secundaire polygonen. Ook kan blijken, dat een hulppolygoon voor deze verbinding noodig is.

Wat de uitvoering van de detailmeting betreft, deze zal in de onderscheidene in ons land voorkomende terreinen op verschillende wijzen worden verricht; het ligt voor de hand dat in de groote steden met drukke en ingewikkelde bebouwing en waardevollen grond, andere eischen worden gesteld aan de uitvoering van de detailmeting dan in terreinen met lage grondprijzen.

Ook spreekt het vanzelf, dat in een terrein met vage grenzen of in het polderland met zijne door slooten afgescheiden perceelen, aan de detailmeting minder hooge eischen van nauwkeurigheid worden gesteld. Het zou niet economisch zijn om in een dergelijk terrein de opmeting der perceelscheidingen met veelvoudige contrôle en op de meest minutieuse wijze tot in centimeters uit te voeren, terwijl door den aard der scheidingen hunne ligging wellicht nog geen zekerheid geeft voor den decimeter.

**Fotogrammetrie**

Indien de in een dergelijk gebied voorkomende scheidingen uit de lucht zijn waar te nemen, zooals dit in polder- en waterland het geval is, zal — wanneer andere overwegingen geen bezwaar opleveren — van het bedoelde gebied een Kadaster kunnen worden samengesteld door gebruik te maken van de *luchtfotogrammetrie*. In terreinen, waar de terrestrische opneming practisch onuitvoerbaar is, zal de fotogrammetrie uitkomst kunnen brengen. De op deze wetenschap steunende methoden vormen daarom eene waardevolle aanvulling van de oudere werkwijzen.

**Gebieden**

Ten aanzien van de nauwkeurigheid voor wat betreft de uitvoering van den meetkundigen grondslag en de daaraan verbonden detailmeting worden de terreinen in drie *gebieden* ingedeeld.

*Gebied* 1 eischt de grootste nauwkeurigheid; het omvat de terreinen met zeer dichte bebouwing en een groot aantal kleine perceelen van hooge waarde. Daartoe moeten gerekend worden de bebouwde gedeelten der groote steden als mede de gedeelten, waarin eene bebouwing spoedig kan worden verwacht.

*Gebied* 2 (normale nauwkeurigheid). Hierin kunnen worden betrokken de kleinere steden, de bebouwde kommen van dorpen en de terreinen met meer verspreide bebouwing, bevattende perceelen van grooter oppervlak en niet te hooge grondprijzen, in het algemeen ook terreinen, waarin markante scheidingen voorkomen, zooals muren, hekken, enz. of ook daar, waar de grenzen door grenssteenen zijn aangeduid.

*Gebied* 3 kan met geringere nauwkeurigheid, wat betreft grondslag en detailmeting volstaan. Het omvat de minder waardevolle terreinen met perceelen van in het algemeen groote oppervlakte met weinig of geen bebouwing, waarin de

perceelen zijn afgescheiden door niet scherp aangegeven en natuurlijke scheidingen, zooals bijv. slooten en houtwallen.

Wat de indeeling in gebieden betreft, moet worden opgemerkt, dat hieromtrent geen scherp omlijnde aanwijzingen zijn te geven. Bij de keuze zal tevens gerekend moeten worden met de toekomst. Een landelijk terrein in de nabijheid van een groote stad moet anders worden beschouwd, dan een analoog terrein in een plattelandsomgeving. In het eerste geval verdient het aanbeveling den meetkundigen grondslag aan te leggen naar de eischen van het gebied, waartoe het in de toekomst zal gaan behooren, tenzij de bodemgesteldheid het behoud van den meer nauwkeurigen grondslag onmogelijk of zeer onwaarschijnlijk maakt.

Het is niet noodig, dat kadasterbladen in hun geheel in een bepaald gebied worden opgenomen, er kan vrijheid worden gelaten elk soort terrein in het daarvoor aangewezen gebied onder te brengen.

Vooral bij toepassing der fotogrammetrie kan een dergelijke handelwijze noodzakelijk zijn; men denke daarbij aan gehuchten in waterland of polders. Dit worden als het ware eilanden, die volgens andere methoden moeten worden behandeld dan het geheel.

In het algemeen gesproken is het van groote beteekenis dat men zich bij voorgenomen vernieuwingen vooraf nauwkeurig rekenschap geeft van de klasse, waarin het gebied moet worden gerangschikt. Het verdient aanbeveling, voor het geheele land de gebiedsindeeling tot stand te brengen, onafhankelijk van de gedachte aan een eventueele hermeting.

Het geval zal zich kunnen voordoen dat een terreingedeelte, gekadastreerd naar den maatstaf van een gebied met geringere nauwkeurigheid, later moet worden opgenomen in een gebied van hoogere nauwkeurigheid, omdat gewijzigde omstandigheden daartoe aanleiding geven. Het over te brengen terreingedeelte kan dan worden ingesloten door een aan de R.D. te verbinden meetkundigen grondslag van drie- en veelhoekspunten, waarbij rekening gehouden wordt met de nu vereischte grootere nauwkeurigheid. De coördinaten van deze punten kunnen zonder meer op het bestaande plan worden gekaarteerd, omdat het daarop voorkomende ruitennet in het stelsel der R.D. is voorgesteld.

**Verzekering van den meetkundigen grondslag**

Het vraagstuk der *verzekering* van den meetkundigen grondslag zal in de dichtbebouwde terreinen een andere oplossing vragen dan in de plattelandsgebieden. Zoo zal de verzekering met „*Kadsteenen*", welke in laatstgenoemde gebieden met succes kan worden gebezigd, in de steden en bebouwde kommen meer als uitzondering voorkomen. Verder is in de groote steden een centrische verzekering van de drie- en veelhoekspunten in het algemeen genomen, niet mogelijk; zij is bovendien niet noodig.

**Blijvende verzekering met boutjes**

Als *duurzame* verzekering van de resultaten der triangulatie komen in bebouwde kommen in aanmerking excentrisch aangebrachte koperen *vastleggingsboutjes*, die in het opgaande muurwerk van nabijgelegen gebouwen worden geplaatst; deze boutjes, waarvan een afbeelding in de bijlagen is opgenomen, moeten tijdens de metingen op de drie- en veelhoekspunten worden bepaald, zoodat zij in coördinaten der R.D. kunnen worden berekend. In vele gevallen kan deze bepaling op eenvoudige wijze geschieden door gebruik te maken van de voerstraal-methode.

De plaatsing van deze boutjes heeft uiteindelijk ten doel een later voortbouwen op de thans verrichte triangulatie gemakkelijk uitvoerbaar te maken. Het spreekt vanzelf, dat deze wijze van verzekering ook voor andere gebieden kan worden gebezigd, in vele gevallen zelfs aanbeveling verdient.

In terreinen, waar geen boutjes kunnen worden geplaatst, is de *Kadsteen* het aangewezen verzekeringsmateriaal voor de triangulatie. Bezigt men den kadsteen voor dit doel, zoo stelle men hem alleen dan in het drie- of veelhoekspunt zelve op, wanneer met redelijkheid kan worden verwacht, dat de verzekering op deze plaats duurzaam is. Zoo niet, dan kan hij veel beter excentrisch worden geplaatst, in ieder geval buiten het wegverkeer en zoo, dat binnen afzienbaren tijd „storing" niet kan worden verwacht. Behalve deze duurzame verzekering kan een eenvoudige tijdelijke worden gebezigd, om tijdens den duur van de opmeting de punten aan te duiden.

**Verzekering met Kadsteenen**

De eischen, die aan de verzekering van *meetlijnen* worden gesteld, zijn verschillend en hangen samen met de aanwezigheid van vaste terreinvoorwerpen en van de mate, waarin men in het vervolg van de lijn gebruik denkt te maken. Indien in de toekomst een geregeld gebruik van de meetlijn kan worden verwacht, is een verzekering op duurzame wijze, zooals door kadsteenen, gewenscht. Kent men aan de verzekering uitsluitend de bedoeling toe de plaats van de meetlijn te kunnen terug vinden, zoo zal aan het plaatsen van een kadsteen minder behoefte bestaan, indien een voldoend aantal vaste terreinvoorwerpen in de meetlijn zijn opgenomen. Meermalen zal tijdens de hermeting zelve het toepassen van de tijdelijke verzekering voldoende zijn.

**Verzekering van meetlijnen**

In vele gevallen zal men in plaats van kadsteenen *draineerbuizen* gebruiken, die gemakkelijker zijn aan te voeren en goedkooper zijn. Men houde in het oog, dat Kadsteenen, vooral vanwege het vervoer en de plaatsing een vrij kostbaar materiaal vormen.

**Verzekering met draineerbuizen**

## § 3. RICHTINGS- EN HOEKMETINGEN

*Richtingsmetingen* geschieden volgens de methode van Bessel, welke hierin bestaat, dat de richtingen seriesgewijze worden gemeten. De te bepalen richtingen worden daartoe opvolgend waargenomen, den kijker bewegende van links naar rechts (*heengang*); daarna worden zij in tegengestelde richting waargenomen (*teruggang*), tot men weer bij de eerst waargenomen richting is teruggekeerd. Eene serie in heengang, gecombineerd met eene onmiddellijk daarop volgende serie in teruggang, wordt *dubbelserie* genoemd.

**Meting volgens de methode van Bessel**

**Heen- en teruggang; dubbelserie**

Alvorens de meting in teruggang uit te voeren, wordt de cirkelrand van den theodoliet gedraaid over een hoek $200^g : s$, waarin $s$ het aantal enkele series voorstelt. Dit aantal houdt verband met de richt- en aflees-nauwkeurigheid van het gebezigde instrument.

Zoo zullen met een theodoliet van oudere constructie, met draaibaren rand en schaalmicroscoop, *vier* dubbelseries moeten worden gemeten voor het verkrijgen van een nauwkeurigheid van 6 à 7 cc in de vereffende richting. Bij moderne theodolieten (Zeiss, Wild) kan dit resultaat reeds worden bereikt door het meten van *twee* dubbelseries.

**Nauwkeurigheid der richtingsmetingen**

Bij eerstbedoelden theodoliet zullen de metingen plaats hebben in de volgende *randstanden*:

**Randstanden**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1e dubbelserie | heengang | $0^g$ | teruggang | $25^g$ |
| 2e ,, | ,, | 50 | ,, | 75 |
| 3e ,, | ,, | 100 | ,, | 125 |
| 4e ,, | ,, | 150 | ,, | 175 |

Vóór den aanvang van de metingen in de 3e dubbelserie wordt de *kijker doorgeslagen*. Indien men volstaan kan met twee dubbelseries, zoo zijn de te bezigen

randstanden: 1e dubbelserie 0 ^g^ en 50 ^g^; 2e dubbelserie 100 ^g^ en 150 ^g^. Voor den aanvang van de tweede dubbelserie wordt dan de kijker doorgeslagen.

Verzetten van den rand

Het verzetten van den cirkelrand bij den teruggang, hetwelk *globaal* behoort te geschieden, heeft als grootste voordeel, dat men geheel onbeïnvloede randaflezingen verkrijgt, hetgeen het rustige waarnemen bevordert en de nauwkeurigheid ten goede komt.

Doorslaan van den kijker; regelingsfouten

Door het *doorslaan van den kijker* op de bovenaangegeven wijze, waarbij dus een zelfde aantal waarnemingen in ieder der beide kijkerstanden wordt verricht, worden de in het instrument optredende *regelingsfouten* geëlimineerd.

Fouten in de opstelling

Uitdrukkelijk zij er aan herinnerd, dat de *fouten in de opstelling* van het instrument *niet* kunnen worden opgeheven door het volgen van een bepaalde meetmethode. Het is daarom zaak er zorgvuldig op te letten, dat tijdens de uitvoering der metingen steeds aan de voorwaarden van opstelling voldaan blijft, dat dus de eerste as van het instrument zuiver vertikaal staat en dat deze tevens gelegen is in de vertikaal van het hoekpunt. Het is derhalve in de eerste plaats noodzakelijk, dat men zich vóór den aanvang der metingen overtuigt, dat *beide* voorwaarden zijn vervuld, terwijl bovendien bij het begin van iedere serie de vertikale stand van de eerste as behoort te worden gecontroleerd door middel van het niveau op den cirkelrand; zoo noodig wordt de bel weder tot inspeling gebracht. Veronachtzaming van de opstellingsvoorwaarde kan grove fouten veroorzaken, wanneer de te bepalen richting een aanmerkelijke elevatie heeft, zooals dit o.a. bij metingen in de steden het geval kan zijn.

Het is trouwens in het algemeen noodig om bij de uitvoering der hoekmetingen alle voorzorgen in acht te nemen, die het verkrijgen van een betrouwbaar en nauwkeurig resultaat kunnen bevorderen. Tijdens de metingen zal men daarom alle invloeden, die schadelijk kunnen zijn, moeten weren. Zoo zal men zooveel mogelijk

Pijler draaiing

*pijlerdraaiing* behooren te voorkomen en mocht deze niet te vermijden zijn, althans trachten te bereiken, dat zij regelmatig kan optreden, waardoor haar invloed in de gemiddelde richting der dubbelserie wordt opgeheven. In het algemeen moet er op gelet worden, dat instrument en drievoet niet te veel en niet onregelmatig aan felle zon zijn blootgesteld; het gebruik van een zonnescherm (groot formaat parasol) is ook bij kadastrale metingen aan te bevelen.

Meting van richtingen

Een regelmatig en vlug tempo bij de uitvoering der richtingswaarnemingen is derhalve van groot belang. Daarom is het ongewenscht een te groot aantal richtingen in een serie op te nemen. Als regel mag, ook bij gunstige atmosferische toestanden en solide opstelling van den theodoliet, een serie niet meer dan *zes* richtingen bevatten. Zijn deze omstandigheden minder gunstig, zoo zal men de

Hoekmeting

series kleiner nemen of overgaan tot hoekmeting, feitelijk het meten van een serie van twee richtingen. Oordeelkundige toepassing van hoekmeting kan trouwens ook in normale omstandigheden voordeelen bieden; in het verdere betoog zal hierop worden teruggekomen.

Bij het uitvoeren van richtings- c.q. hoekmetingen lette men er zoo mogelijk op, dat de te meten punten *niet op te ongelijken afstand* zijn gelegen; in ieder geval trachte men te vermijden, dat de oculairbuis van den kijker tijdens de meting moet

Metingen van richtingen op verschillenden afstand

worden verplaatst. Bij het bepalen van een richting naar een op *zeer* korten afstand gelegen punt ten opzichte van een richting naar een veraf gelegen voorwerp, is het aan te bevelen om ieder dezer richtingen telkens direct na elkaar in beide kijkerstanden waar te nemen, waardoor eventueele fouten door wijziging van de vizierlijn tengevolge van het in- en uitschuiven van de oculairbuis worden geëlimineerd.

Vanzelfsprekend mag tijdens de waarneming van dezelfde richting in twee opvolgende kijkerstanden, de oculairbuis niet worden verschoven.

Ten slotte wordt er de aandacht op gevestigd, dat de metingen op de daarvoor gunstige tijdstippen van den dag moeten geschieden. Voor metingen naar punten op korten afstand, zooals dit bij polygoonmetingen het geval is, kunnen gewoonlijk alle uren van den dag worden benut. Bij metingen op grooteren afstand, voor de bepaling van driehoekspunten, is men in de keuze meer beperkt. De meest gunstige waarnemingstijd voor metingen op grooten afstand valt als regel in den namiddag, wanneer de beelden tot rust zijn gekomen, in de periode derhalve, tusschen de beëindiging van de dagondulatie en het intreden van de avondondulatie. Ook in de vroege morgenuren is er een periode van rust; deze is evenwel gewoonlijk van te korten duur om er practisch profijt van te trekken.

**Tijd van waarnemen**

De metingen worden aangeteekend in het daarvoor bestemde hoekmeetformulier (hermeting n°. 11), hetwelk wat betreft de kolommen 1—7 geen nadere toelichting behoeft. De kolommen 8, 9 en 10 geven gelegenheid voor de berekening van middelbare fouten, welke berekening plaats heeft op de volgende wijze: $r$ is het aantal richtingen in iedere serie; $s$ is het aantal enkele series. In kolom 8 worden ingevuld de grootheden $q$, welke uit de waarnemingen worden afgeleid door van iedere waarneming het overeenkomstig gemiddelde af te trekken. De grootheden $q$ worden voor iedere serie gesommeerd tot $[q]$, welke som wordt gedeeld door het aantal richtingen, dat iedere serie bevat.

**Formulier n°. 11**

**Berekening van middelbare fouten**

Door nu van ieder der grootheden $q$ het bedrag $[q] : r$ af te trekken, worden de verschillen $v$ gevonden, welke in kolom 9 tegenover de waarneming worden geplaatst; zij geven een overzichtelijk beeld van de nauwkeurigheid, waarmede de waarnemingen zijn uitgevoerd. Kolom 10 bevat de kwadraten $vv$, die worden gesommeerd tot $[vv]$.

De middelbare fout in de enkele waarneming $M$ wordt uitgedrukt als volgt:

$$M = \sqrt{\frac{[vv]}{(r - 1)(s - 1)}}$$

waaruit de middelbare fout in de gemiddelde richting wordt gevonden als:

$$m = \frac{M}{\sqrt{s}}.$$

## § 4. CENTREERING EN LOKALE DRIEHOEKSMETING

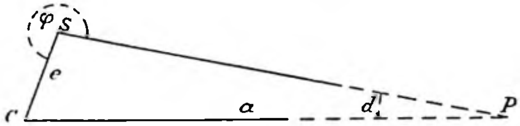
Wanneer de richtingsmetingen op den beganen grond plaats hebben, zal in den regel het instrument kunnen worden opgesteld in de vertikaal van het driehoekspunt. Het zal evenwel meermalen voorkomen, dat een of meer richtingen excentrisch moeten worden gemeten. Dit laatste zal als regel en voor alle richtingen het geval zijn bij metingen op torens en andere gebouwen.

Aangezien in het algemeen voor de verdere berekening de richting in centrum zal worden verlangd, moeten voor de excentrisch gemeten richtingen worden uitgerekend de wijzigingen, welke deze richtingen moeten ondergaan om ze te herleiden tot centrisch gemeten richtingen. Deze wijzigingen, *overgangen* genaamd, worden berekend in *Formulier* 14, berekening van overgangen.

**Centreering van richtingen; overgangen**

**Formulier 14, berekening van overgangen**

Ter toelichting van dit formulier diene het volgende.




In nevenstaande figuur is $S$ de standplaats van meting op een tot meetstation ingericht driehoekspunt; $C$ is het centrum van dit meetstation.

In $S$ zijn richtingen gemeten naar omliggende driehoekspunten; een dezer punten is het punt $P$; verder is in $S$ bepaald de richting naar het centrum $C$, terwijl ook de afstand $SC$ is gemeten. De afstand $CP = a$ wordt berekend uit de coördinaten der punten $C$ en $P$.

De overgang van $S$ naar $C$ voor de richting $P$, in de figuur het hoekje $d$, wordt gevonden uit de betrekking:

$$\sin d = \frac{e \sin \varphi}{a}$$

**Teeken van den overgang**

$\varphi$ is het verschil tusschen de richtingen $SP$ en $SC$; het *teeken van den overgang* wordt steeds door dit verschil bepaald.

In de figuur is $\varphi = (\overline{SP}) - (\overline{SC})$ de buitenhoek van den hoek $S$ in den driehoek $SPC$; $\sin \varphi$ en dus ook de overgang $d$ heeft in het gestelde geval een negatieve waarde.

**Benaderingsformule ter berekening van den overgang**

Bij geringe waarde van $d$, kan in plaats van de vorenstaande betrekking een *benaderingsformule* worden gebezigd en zal men de waarde van den overgang berekenen uit:

$$d = \varrho \frac{e \sin \varphi}{a}$$

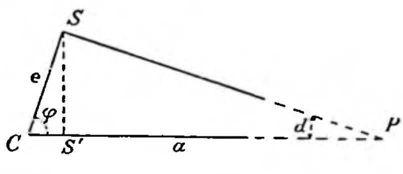
waarin $\varrho$ voorstelt het aantal cc van de radiaal. De grens van $d$, waarvoor de benaderingsformule nog kan gelden, is te stellen op één graad (centesimaal). Boven deze grens zou men derhalve den overgang moeten berekenen uit de betrekking van $\sin d$.

Het is evenwel mogelijk om ook voor waarden van $d$, grooter dan $1^g$ de benaderingsformule te blijven bezigen, mits men aan den op deze wijze verkregen *benaderden* overgang, in het formulier $d'$ genoemd, nog een correctie aanbrengt.

Ter vaststelling van deze correctie kan men gebruik maken van de in de bijlage verstrekte tabel. Daarin worden voor hoeken tot $8^g$ de correcties $\triangle d$ aangegeven, welke aan de grootheden $d'$, berekend met de benaderingsformule, moeten worden toegevoegd om de juiste waarde $d$ voor den overgang te verkrijgen.

Het formulier 14 is geheel naar deze rekenwijze ingericht.

Wanneer omgekeerd de overgang moet worden berekend van het centrum $C$ naar de excentrische standplaats $S$ voor eene richting $P$, zoo zal men dezen overgang vinden als: $d = \varrho \dfrac{e \sin \varphi}{SP}$ (zie nevenstaande figuur).




Hierin is $\varphi = (\overline{CP}) - (\overline{CS})$; $e \sin \varphi$ moet worden gedeeld door $SP$, welke afstand niet bekend is. Ter bepaling van $SP$ kan men verschillende wegen volgen; bij geringe waarde van $d$ is $SP$ gelijk te stellen aan $S'P$ en is dus $SP = a - e \cos \varphi$.

Men zou $e \cos \varphi$ kunnen uitrekenen en daaruit $a - e \cos \varphi$ verkrijgen. Voert men de berekeningen uit met logarithmen, zoo zal men in de logarithmentafel

log $a$ opzoeken en vervolgens in die tafel vinden de aan log $a$ te geven wijziging, correspondeerende met — $e$ cos $\varphi$, waardoor dus direct in de logarithmentafel log ($a$ — $e$ cos $\varphi$) gevonden is.

**Herleiding van den afstand voor de centreering**

Ook zou men als volgt kunnen te werk gaan:

$$d = \varrho \frac{e \sin \varrho}{a - e \cos \varphi} = \varrho \frac{e \sin \varphi}{a \left(1 - \frac{e \cos \varphi}{a}\right)}.$$

Bij geringe waarde van $d$ kan bij benadering worden geschreven:

$$d = \varrho \frac{e \sin \varphi}{a} \left(1 + \frac{e \cos \varphi}{a}\right).$$

Noemt men $\frac{e \sin \varphi}{a} = d_1$, zoo is de gevraagde overgang:

$$d = d_1 + \delta, \text{ waarin } \delta = d_1 \frac{e \cos \varphi}{a}.$$

Volgens deze methode behoeft men dus den afstand niet te herleiden.

Aangezien het evenwel veelvuldig voorkomt, dat de afstand $e$ vrij groot is, terwijl het punt $P$, waarop men oriënteert dichtbij gelegen is, zoodat de afstanden $SP$ en $S'P$ niet aan elkander kunnen worden gelijk gesteld, zoo zal in alle voorkomende gevallen de veiligste weg deze zijn, dat men eerst de coördinaten van $S$ ten opzichte van $C$ bepaalt en uit de coördinaten van $S$ en de reeds bekende van $P$ den afstand $SP$ berekent.

Deze laatste rekenwijze wordt daarom *aanbevolen.*

**Lokale driehoeksmeting**

In het voorgaande is aangenomen, dat de afstand $e$ en de hoek $\varphi$ door directe meting kunnen worden verkregen. Dit is bij metingen op den beganen grond als regel het geval. Directe bepaling is evenwel niet mogelijk, wanneer als station wordt gebezigd een hoog gebouw, gewoonlijk een kerktoren, waarvan het centrum, met name de stang op de torenspits ontoegankelijk is.

In dit geval verricht men een *lokale driehoeksmeting.*

Ook bij de contrôle van een torenspits uit een vastleggingsbout of bij de bepaling van de ligging van een vastleggingsbout ten opzichte van een als centrum aangenomen punt, moet een lokale driehoeksmeting worden toegepast. Ook hier moet een afstand en een argument op indirecte wijze worden bepaald.

De berekening van een lokale driehoeksmeting geschiedt in het formulier 18. De volgende overwegingen hebben bij de inrichting van dit formulier gegolden.

Bij elke lokale driehoeksmeting is de relatieve ligging van een aantal stationspunten door meting bepaald. Om de absolute ligging van deze figuur te kunnen aangeven, moeten van één van haar punten de coördinaten in het systeem der R. D. bekend zijn en moet op een ander punt de richting naar een ver verwijderd punt aan de bovengenoemde figuur worden verbonden. Het eerste punt zal genoemd worden het *coördinatenpunt* (in het formulier aangeduid met de letter *K*) en het tweede punt het *richtingspunt* (aangeduid met de letter *R*).

Bij de bepaling van een vastleggingsbout uit het centrum is *K* het Centrum; K is de vastlegging als omgekeerd de ligging van het Centrum uit de vastlegging moet worden gecontroleerd.

Moet een torenspits bepaald worden uit metingen op den toren zelf, dan kan *K* zijn een punt, waarvan uit de metingen benaderde coördinaten te bepalen zijn en zoo vervolgens.

2

Het punt R kan eveneens op verschillende plaatsen gelegen zijn. In het eenvoudigste geval ligt het in *K*, ook kan het in een basiseinde liggen, terwijl het soms noodig is hiervoor een apart punt te kiezen, hetzij op den toren, hetzij op den beganen grond. (Dit punt moet natuurlijk verbonden worden aan de figuur der stationspunten.)

Geschiedt de koppeling van de richting naar het ver verwijderde punt aan de figuur van de stationspunten door het meten van een hoek, dan moet ervoor gezorgd worden, dat als tweede stationspunt een punt gekozen wordt, dat niet te dicht bij de standplaats ligt.

De wijze van berekening en van invulling van het formulier zullen aan de hand van enkele concrete gevallen uiteengezet worden.

### VERZEKERING VAN EEN TORENCENTRUM

**Verzekering van een torencentrum**

Op den beganen grond in de onmiddellijke nabijheid van den toren worden *twee* geschikt gelegen punten opgezocht, die onderling zichtbaar zijn en waarvan de afstand door directe meting kan worden bepaald. Verondersteld wordt, dat in geen dezer punten de richting naar een ander in de R. D. bekend punt is te meten.

**Basis-eindpunten**

Deze twee punten vormen de eindpunten van de basis van een lokale driehoeksmeting, waarin worden opgenomen het centrum van den toren, een excentrische standplaats op dien toren, benevens één of meer in den toren geplaatste bouten, de z.g. vastleggingen, welke laatste dienen ter verzekering van den toren. In de excentrische standplaats op den toren worden gemeten de richtingen naar de basiseindpunten, tot een serie verbonden met de richting naar een verwijderd bekend punt *P*. Hiermede zijn alle gegevens voor de oplossing van het vraagstuk aanwezig; voor de berekening wordt gebruik gemaakt van het centreeringsformulier n°. 18. In dit vraagstuk is het centrum *K* (coördinatenpunt) en de excentrische standplaats R (richtingspunt).

De gemiddelden der centreeringswaarnemingen en de voor de basis op blz. 4 van het formulier vastgestelde lengte (of hare logarithme) worden ingeschreven in afdeeling 2, den verzamelstaat. Uit dezen staat worden in afdeeling 1 de gegevens overgenomen ter berekening van de driehoeken. In den driehoek, gevormd door de basis en het richtingspunt R zijn alle hoeken door meting verkregen. Zij leveren dus de correctie aan elk dier hoeken aan te brengen; deze correctie wordt eveneens gegeven aan de overige in de basis gevormde hoeken. De berekening van de driehoekszijden geschiedt, uitgaande van de lengte van de basis, met den sinusregel:

$$m = a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$$

($m$ is de middellijn van den omgeschreven cirkel).

Met de nu verkregen gegevens wordt de verzamelstaat aangevuld tot en met de kolom gecorrigeerde richtingen, terwijl ook de laatste kolom, die der afstanden (of hunner logarithmen) kan worden ingevuld.

**Hulp-assenstelsel**

Aangezien de in het richtingspunt R gemeten richting naar het gegeven punt P niet in het assenstelsel der R. D. bekend is, wordt voorloopig gebruik gemaakt van een hulpstelsel, waarvan het punt R de oorsprong is en de richting *RP* de positieve tak van de *Y*-as. In dit stelsel zijn dus alle gecorrigeerde richtingen te oriënteeren, welke derhalve in kolom 5 van den verzamelstaat als richtingen $\Theta$ kunnen worden ingeschreven.

Gebruik makende van de betreffende richtingen $\Theta$ en de daarbij behoorende afstanden wordt nu in afdeeling 3 de coördinaat (abscis) $\xi$ van het Centrum berekend door, op de wijze van een polygoon, eerst te berekenen de abscis van een der basis-

punten en vervolgens van Centrum. Voor *contrôle* wordt de berekening voortgezet door van uit Centrum de abscis van het andere basispunt te berekenen om tenslotte terug te keeren tot het punt R, dat dus de uitkomst 0,000 moet opleveren.

In de afdeeling 4 volgt nu de berekening van de oriënteering $\omega$, welke aan de richtingen $\Theta$ in het hulpstelsel moet worden toegevoegd om de argumenten $\psi$ te verkrijgen. Daar in het onderstelde geval het Centrum *coördinatenpunt* is, zijn $X_c$ en $Y_c$ identiek met $X_k$ en $Y_k$. Uit de R. D.-coördinaten $X_p$ en $Y_p$ van het bekende punt $P$ en die van Centrum ($X_k$ en $Y_k$) zijn te berekenen het argument $\overline{KP}$ en de afstand $KP$.

**Coördinatenpunt K**

De oriënteering wordt gevonden uit:

$$\omega = \overline{KP} + d = \overline{RP}$$

**Oriënteering**

waarin: $$d = d' + \triangle d \text{ en } d' = \frac{\xi_k}{KP}$$

$d$ is hier in feite de overgang van het Centrum naar het richtingspunt R voor de richting naar $P$.

In den verzamelstaat kunnen thans de argumenten $\psi = \Theta + \omega$ worden ingevuld, waarmede alle gegevens voor de verdere berekening voorhanden zijn.

In afdeeling 5 worden de coördinatenverschillen met Centrum berekend met inachtneming van de noodige contrôle. Uit de verkregen resultaten worden in afdeeling 6 de richtingen en afstanden ten opzichte van Centrum uitgerekend, waarna tenslotte op het titelvel de „Uitkomsten" worden vermeld.

In het voorgaande is verondersteld, dat het in de basis-eindpunten zelve niet mogelijk is gebleken een richting te nemen naar een verwijderd bekend punt $P$. Wanneer dit wel mogelijk is, kan het vraagstuk aanzienlijk worden vereenvoudigd. Het basispunt, waar de richting naar het bekende punt $P$ gemeten wordt, is het *richtingspunt* en dus oorsprong van het hulpstelsel.

**Verzekering van een torencentrum door metingen uitsluitend in de basiseindpunten**

In afdeeling 3 is de coördinaat $\xi$ van het Centrum (coördinatenpunt) onmiddellijk te berekenen uit afstand en richting $\Theta$ van basispunt-centrum.

De berekening van de oriënteering $\omega$ geschiedt geheel op de wijze als hiervoor aangegeven, zoo ook de verdere berekening in de afdeelingen 5 en 6.

## CONTRÔLE VAN EEN VROEGER BEPAALD TORENCENTRUM

Als gebleken is, dat een vroeger verzekerde toren der R. D. wijziging heeft ondergaan, in het algemeen *storing* van het driehoekspunt wordt vermoed, kan door de uitvoering van een nieuwe lokale driehoeksmeting worden uitgemaakt, hoeveel het driehoekspunt zich verplaatst heeft.

**Contrôle van een torencentrum; storing**

Indien de vroeger geplaatste verzekeringsbout Vastlegging I nog aanwezig is, zal deze als uitgangspunt moeten worden genomen. Het is niet noodig, zelfs niet gewenscht, gebruik te maken van de vroegere basispunten, tenzij uit noodzaak, wanneer de andere, betere contrôle mocht ontbreken. De ondervinding heeft geleerd, dat basispunten als vastleggingen niet meer dan tijdelijke waarde hebben.

Wanneer de terreinsomstandigheden het mogelijk maken in een der (nieuwe) basispunten de lokale driehoeksmeting te verbinden met de richting naar een bekend punt, kan de uitvoering geschieden op de eenvoudige wijze als hiervoor aangegeven, waarbij het bedoelde basispunt het richtingspunt is. Uiteraard zal thans de Vastlegging I het coördinatenpunt $K$ zijn, zoodat in afdeeling 4 de coördinaten van dit punt uit de gegevens der vroegere centreering moeten worden bepaald.

**Vastlegging I, coördinatenpunt**

Verder wordt de berekening van de oriënteering, die der coördinatenverschillen en van richting en afstand op de bekende wijze uitgevoerd.

In het getallenvoorbeeld, opgenomen in de bijlage, is als richtingspunt genomen een excentrische standplaats op den toren, met name het punt Pijler, in welk punt eveneens richtingsmetingen werden uitgevoerd.

Na het hiervoor medegedeelde behoeft de uitgevoerde bewerking geen nadere toelichting; zij bevat het vraagstuk van contrôle van het torencentrum en levert tevens in de „Uitkomsten" de centreeringselementen ten behoeve van de berekening van de overgangen naar Centrum voor de in Pijler uitgevoerde metingen.

De contrôle van het Centrum voert in het getallenvoorbeeld tot de conclusie, dat het nieuw bepaalde punt „stang" met Centrum identiek kan worden gesteld.

**Oriënteeringscorrectie $\Delta\,\omega$**

Het kan voorkomen, dat bij de berekening van de lokale driehoeksmeting voorloopig gebruik moet worden gemaakt van de benaderde coördinaten van het coördinatenpunt; daardoor zal men de berekening voorloopig moeten uitvoeren met benaderde argumenten $\varphi$, welke nog een kleine correctie kunnen ondergaan. In een zoodanig geval wordt na het bekend worden van de definitieve coördinaten van het Centrum op blz. 1 van het formulier n°. 18 de definitieve waarde van de oriënteering $\omega^*$ berekend en daaruit de correctie $\Delta\,\omega = \omega^* - \omega$ gevonden, welke correctie nog aan de berekende richtingen moet worden aangebracht, waarna in kolom 3 van de afdeeling „Uitkomsten" de definitief georiënteerde richtingen $\varphi^*$ worden ingeschreven.

**Bepaling van de lengte van de basis**

De lengte van de basis wordt nauwkeurig vastgesteld als gemiddelde tusschen twee of meer metingen; bij effen terrein kan de meting over den grond geschieden; bij oneffen bodem zal men de basis meten over de koppen van driepooten, gebruik makende van een meetband van 30 of 50 m onder een constante spanning van 10 kg. De spannings- en doorbuigingscorrectie, die vooraf wordt bepaald, wordt in rekening gebracht, benevens — waar noodig — de correctie voor de temperatuur, terwijl bij helling van de basis, de gevonden lengte nog moet worden herleid tot den horizont. Tenslotte wordt aan de lengte nog aangebracht de correctie voor de lijnenvergrooting in het driehoekspunt, als gevolg van de stereografische projectie. Alles wat op de lengtebepaling van de basis betrekking heeft, wordt verzameld op blz. 4 van het formulier.

De met behulp van de lokale driehoeksmeting te bepalen afstanden zullen meestal kleiner zijn dan de basis. Fouten in de meting van de basis gaan derhalve verkleind in het resultaat over. De boven beschreven extra voorzorgen bij de basismeting hebben dan ook meestal uitsluitend ten doel een nauwkeurige overgang te verkrijgen. Hoe kleiner de overgang is, des te geringer kan de nauwkeurigheid van de lengtemeting van de basis zijn. Het verdient aanbeveling hiermede rekening te houden.

Nog moge worden opgemerkt, dat de basis een zoodanige lengte behoort te hebben, dat de verschillende punten van het station uit gunstige snijdingen worden bepaald; een ongeveer loodrechte is natuurlijk het meest aan te bevelen. De terreinsomstandigheden verhinderen echter meermalen de gewenschte gunstige bepaling. Als eisch moet niettemin worden gesteld, dat de kleinste hoek van den driehoek minstens 25 centesimale graden behoort te zijn.

Het is niet altijd mogelijk om alle punten van het station vanuit de basis te bepalen. Het kan n.l. noodig zijn een standplaats van meting in te richten of vastleggingen ter verzekering te stellen op gedeelten van den toren, welke vanuit de basispunten niet zichtbaar zijn.

Deze punten zal men dan bij voorkeur zoo kiezen, dat zij op eenvoudige wijze, door het meten van richting en afstand, ten opzichte van in de lokale driehoeksmeting opgenomen stationspunten kunnen worden bepaald.

## § 5. FORMULIER N°. 12
## STAAT VAN BEREKENING DER ARGUMENTEN EN AFSTANDEN

Het formulier is zoowel ingericht voor logarithmisch gebruik, als voor de berekening met de rekenmachine. Bezigt men de machine, zoo wordt in kolom 5 de waarde tang $\psi$ ingeschreven; de waarde van het argument $\psi$ moet worden opgezocht in een tafel, waarin de getallenwaarden der goniometrische functies in zes decimalen zijn opgegeven; tegelijk worden daarin gevonden de waarden sin $\psi$ en cos $\psi$, in te vullen in kolom 6.

**Berekening der argumenten**

Alle berekeningen ter bepaling van argumenten uit coördinaten, zoowel uit benaderde als definitieve worden in het formulier uitgevoerd en waar noodig ook de berekening der afstanden, met de contrôle als in kolom 6 aangegeven. Steeds worden daarin berekend de argumenten voor de in een punt samenkomende richtingen, nadat de definitieve waarden der coördinaten van dit punt zijn vastgesteld in de betreffende formulieren voor de vereffening.

Het formulier wordt ook benut voor de berekening der richtingscoëfficiënten a en b; bij de toelichting op de berekening der definitieve coördinaten van afzonderlijk vastgelegde driehoekspunten zal op de beteekenis dezer coëfficiënten en hunne vaststelling worden teruggekomen.

**Berekening der richtingscoëfficiënten a en b**

Formulier 12 geeft geen directe contrôle op de berekening der argumenten. Waar contrôle niettemin gewenscht is, kan deze als volgt worden verkregen. Men denke zich het assenstelsel der R. D. over een hoek $\theta$ gedraaid. Noemt men de coördinaten van een willekeurig punt $P$ in het assenstelsel der R. D. $X$ en $Y$, in het gedraaide assenstelsel $\overline{X}$ en $\overline{Y}$, zoo is:

$$\overline{X} = X \cos\theta - Y \sin\theta \quad \text{en} \quad \overline{Y} = X \sin\theta + Y \cos\theta$$

Een zelfde betrekking wordt voor de coördinatenverschillen $\overline{x}$ en $\overline{y}$, ten opzichte van $x$ en $y$ gevonden. Zij n.l. $\psi$ het argument eener lijn in het stelsel der R. D., zoo is dit argument in het gedraaide stelsel $\overline{\psi} = \psi - \theta$ en wordt gevonden:

$$\overline{x} = l \sin\psi' = l \sin(\psi - \theta), \text{ waaruit:}$$

$$\overline{x} = x \cos\theta - y \sin\theta$$

evenzoo:

$$\overline{y} = x \sin\theta + y \cos\theta$$

Neemt men voor $\theta$ de waarde $50^g$, zoo is zoowel sin $\theta$ als cos $\theta$ gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en vindt men voor de coördinaten in het gedraaide assenstelsel:

$$\overline{X} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\,(X - Y) \text{ en } \overline{Y} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\,(X + Y)$$

en voor de coördinatenverschillen eveneens:

$$\overline{x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\,(x - y) \text{ en } \overline{y} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\,(x + y)$$

Uit de laatste betrekkingen wordt het argument gevonden als:

$$\text{tang } \overline{\psi} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \frac{x - y}{x + y}$$

De contrôle op de berekening der argumenten wordt nu als volgt tot stand gebracht. In de coördinatenlijst formulier n°. 6 worden voor ieder berekend punt de coördinaten $X$ en $Y$ ingeschreven. Men legt daarnaast een tweede lijst aan,

Contrôle op de berekening der argumenen

waarin voor ieder dier punten de waarden $X - Y$ en $X + Y$ worden vermeld. Waar het alleen te doen is om de contrôle der argumenten, heeft men in laatstgenoemde waarden alle gegevens voor die contrôle. Men beschouwt n.l. $X - Y$ en $X + Y$ zuiver als coördinaten; bij de berekening van de argumenten $\overline{\psi} = \psi - 50g$ worden op de gewone wijze de coördinatenverschillen opgemaakt, welke dus de waarden $x - y$ en $x + y$ leveren voor de betrekking tang $(\psi - 50g) = \dfrac{x - y}{x + y}$.

Het verdient dus aanbeveling twee formulieren n°. 12 aan te leggen. Het eene, waarin de argumenten $\psi$ berekend worden, correspondeert met het officieele formulier n°. 6; het andere, hetwelk de argumenten $\overline{\psi} = \psi - 50g$ levert, correspondeert met het contrôleformulier n°. 6, waarin de waarden $X - Y$ en $X + Y$ worden ingeschreven.

## § 6. FORMULIER N°. 13
## STAAT VAN WAARNEMINGEN EN UITKOMSTEN

Deze Staat bevat de *gegevens* voor de verdere berekeningen en geeft een overzicht van de *Uitkomsten* dier berekeningen.

Centrisch en excentrisch gemeten richtingen

Wat betreft de gegevens, worden in dien staat overgenomen de in formulier 11 verzamelde gemiddelden der richtingen, zoowel de in het centrum verkregen, als de excentrisch waargenomen richtingen, zoodat het hoekmeetformulier voor de verdere berekening van het punt niet meer behoeft te worden geraadpleegd.

Uit het formulier 14 worden overgenomen de aldaar berekende overgangen, zoodat in kolom 3 van den Staat alle *gemeten richtingen* $\alpha$ *in Centrum* worden ingeschreven.

Terzijde worden ingevuld de naam van de betreffende kadastrale gemeente; verder met in het oog vallend schrift het nummer c.q. de naam van het driehoekspunt, vervolgens zijn coördinaten R. D. en waar deze bekend zijn de middelbare fouten $M_x$ en $M_y$, benevens de middelbare fouten berekend voor de *richtingen* in het hoekmetings- en in het vereffeningsformulier en tenslotte de verwijzing naar de overige formulieren.

In het formulier worden onder „Opmerkingen" vermeld de gebezigde *centreeringselementen* ter berekening van den overgang, hetzij dat deze elementen door directe meting zijn verkregen, hetzij dat deze langs indirecten weg zijn bepaald; in dit laatste geval worden zij overgenomen van het titelvel van het centreeringsformulier n°. 18.

Voor *ieder driehoekspunt* wordt *een blad* van den Staat gereserveerd; waar dit noodig blijkt nog een vervolgblad. Naar mate de berekening vordert, wordt de Staat aangevuld; hij wordt steeds zorgvuldig bijgehouden, zoodat na de voltooiing van meting en berekening een *volledig overzicht* wordt verkregen, zoowel van de waarnemingen als van de uitkomsten.

Oriënteering

In kolom 2 van den Staat n°. 13 worden uit den Staat n°. 12 overgenomen en met *rooden inkt* ingevuld de reeds bekende definitieve argumenten $\psi$, van welke voor de verdere berekening zal worden uitgegaan; in kolom 6 worden vervolgens de verschillen $\psi - \alpha$ ingeschreven, de verschillen welke voor de oriënteering moeten dienen, in rooden inkt. In het algemeen wordt al hetgeen op de *oriënteering* betrekking heeft in *rooden inkt* vermeld.

Richtingen met gelijk en ongelijk gewicht

Bij het bepalen van den oriënteeringshoek $O$ wordt rekening gehouden met eventueel voor de richtingen ingevoerde gewichten $g$, in te vullen in kolom 7; bij gelijk gewicht voor de richtingen is het gemiddelde der in rood vermelde ver-

schillen $\psi - \alpha$ de oriënteeringshoek $O$, welke, opgeteld bij de gemeten richtingen $\alpha$ van kolom 3 de gemeten en georiënteerde richtingen $\alpha + O$ oplevert, in te schrijven in kolom 8.

In kolom 9 worden de verschillen $v$ tusschen de definitieve en gemeten argumenten vermeld; zijn de richtingen alle van gelijk gewicht, zoo zal de som der verschillen $v$ nul zijn (contrôle). In kolom 8 komen vervolgens ook de gemeten en georiënteerde richtingen van de overige in het driehoekspunt gemeten richtingen te voorschijn.

## § 7. FORMULIEREN VOOR DE BEREKENING VAN DE BENADERDE COÖRDINATEN VAN EEN DRIEHOEKSPUNT ALGEMEENE OPMERKINGEN

Aan de berekening (vereffening) van de definitieve coördinaten van een afzonderlijk vastgelegd driehoekspunt gaat vooraf de bepaling der *benaderde coördinaten* van dit punt. Tenzij deze reeds op andere wijze bekend zijn, worden de benaderde coördinaten in het algemeen berekend uit het strikt benoodigde aantal richtingen, alzoo bij berekening uit de buitenpunten uit twee *voorwaartsche*, bij gebruikmaking van metingen in het te bepalen punt (Snelliusmeting) uit drie *achterwaartsche* richtingen.

**Berekening van de benaderde ligging; nauwkeurigheid**

Daartoe wordt uit de beschikbare richtingen een keuze gedaan zoodanig, dat daaruit de ligging van het punt het nauwkeurigst bepaald wordt. Deze benaderde ligging mag niet te veel van de definitieve afwijken; het is in het algemeen gewenscht de benadering binnen een of twee decimeter te houden, opdat voor de berekening van de definitieve argumenten $\psi$ kan worden volstaan met de eerstegraadstermen van een daartoe te ontwikkelen reeks.

**Linieering; optelling en aftrekking**

Ter vergemakkelijking van de berekening is er bij de linieering der rekenformulieren op gelet, dat daarin het *optellen* van twee of meer te sommeeren grootheden wordt aangegeven door een *volle lijn*, terwijl een *geblokte* of *stippellijn* aanduidt, dat het *verschil* moet worden genomen van de boven deze lijn geplaatste grootheden.

Ten behoeve van de berekening der benaderde coördinaten van een driehoekspunt zijn in deze handleiding vier rekenformulieren opgenomen.

*Formulier* 15, ingericht voor het rekenen met logarithmen, is gebaseerd op de oplossing van het problema van Snellius onder gebruikmaking van het hulppunt van Collins.

*Formulier* 16*a*, ingesteld op het gebruik van de rekenmachine, geeft de oplossing van het problema van Snellius volgens de methode van Cassini.

*Formulier* 16*b* behandelt evenals formulier 16*a* eveneens de bepaling van een punt volgens achterwaartsche snijding en geeft de oplossing van dit vraagstuk naar de methode van de *barycentrische* coördinaten.

*Formulier* 17 behandelt het geval van voorwaartsche snijding en is eveneens ingericht voor rekenmachine-gebruik.

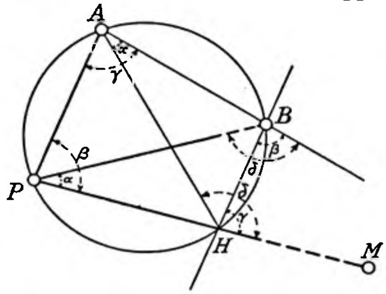
### FORMULIER N°. 15.

#### OPLOSSING VAN HET VRAAGSTUK VAN SNELLIUS (METHODE COLLINS)

#### BEREKENING MET LOGARITHMEN

In de figuur is $P$ het onbekende punt, waarin richtingen zijn gemeten naar drie bekende punten $A$, $B$ en $M$. Door twee dier punten $A$ en $B$ en het gevraagde

punt $P$ denkt men zich een cirkel beschreven. Het snijpunt van de lijn $PM$ met den omtrek van den cirkel is het hulppunt van Collins, in de figuur voorgesteld door $H$.




De ligging van $H$ wordt bepaald uit de elementen van den driehoek $ABH$, waartoe vooraf worden berekend het argument $\overline{AB}$ en de afstand $AB$. Daarna worden de argumenten $\overline{AH}$ en $\overline{BH}$ gevonden en vervolgens de coördinaten van het punt $H$. Uit de coördinaten van $H$ en $M$ is te berekenen het argument $\overline{PM}$, waaruit weer worden gevonden de hoeken $\gamma$ en $\delta$, zoodat het punt $P$ vervolgens kan worden berekend uit de elementen van den driehoek $APB$.

Het vraagstuk komt dus eenvoudig hierop neer, dat eerst het hulppunt van Collins $H$ en vervolgens het punt $P$ door voorwaartsche snijding wordt bepaald.

**Berekening van een punt uit twee voorwaartsche richtingen**

Beschikt men over 2 voorwaartsche richtingen bijv. uit de punten $A$ en $B$, zoo kan de berekening zich bepalen tot de bovenste helft van het formulier. Het punt $H$ treedt dan in de plaats van het punt P.

Voor een zooveel mogelijk nauwkeurige bepaling van de benaderde coördinaten van een nieuw punt $P$ uit metingen naar drie bekende punten is het zaak de gegeven punten $A$, $B$ en $M$ zoo uit te kiezen, dat het hulppunt van Collins $H$ en het punt $M$ zoover mogelijk van elkander vandaan komen te liggen. De bepaling wordt gunstiger, naarmate de hoek $APB$ nadert tot een rechte en de afstanden $PA$ en $PB$ klein zijn.

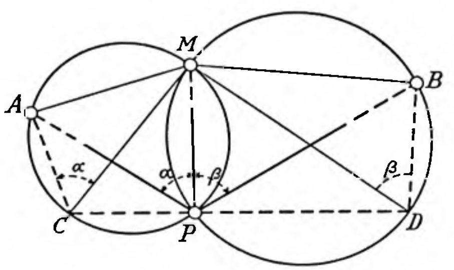
Ligt $P$ op of nabij den omgeschreven cirkel van den driehoek, gevormd door de punten $A$, $B$ en $M$, zoo is de berekening onmogelijk of onzeker.

## FORMULIER N°. 16a

### OPLOSSING VAN HET VRAAGSTUK VAN SNELLIUS (METHODE CASSINI)

### BEREKENING MET DE MACHINE

De oplossing van het problema van Snellius volgens de methode Cassini eigent zich in bijzondere mate voor het gebruik van de rekenmachine. De berekening neemt weinig tijd in beslag; een nadeel van de methode is, dat contrôle tijdens de bewerking niet aanwezig is. Bij eenige routine in het machinerekenen blijkt dit evenwel in de practijk weinig bezwaar op te leveren.




Ter toelichting van het formulier het volgende:

$A$, $M$ en $B$ zijn bekende punten, $P$ is het te bepalen punt.

Door de punten $A$, $M$ en $P$ en door $M$, $B$ en $P$ denkt men zich cirkels beschreven. Door het punt $P$ wordt de lijn $CD$ getrokken loodrecht op de gemeenschappelijke koorde $PM$ van deze cirkels.

Nu is:

$$X_c - X_a = AC \sin \overline{AC} = AM \cot \alpha \sin (\overline{AM} + 100^g) = AM \cot \alpha \cos \overline{AM} =$$
$$= (Y_m - Y_a) \cot \alpha$$

waaruit:

$$X_c = X_a + y_\alpha \cot \alpha \qquad y_\alpha = Y_m - Y_a$$

ook is:

$$X_d = X_b + y_\beta \cot \beta \qquad y_\beta = Y_b - Y_m$$

evenzoo wordt gevonden:

$$Y_c = Y_a + x_\alpha \cot \alpha \qquad x_\alpha = X_a - X_m$$

en:

$$Y_d = Y_b + x_\beta \cot \beta \qquad x_\beta = X_m - X_b$$

De vier bovenstaande waarden voor de coördinaten van de punten $C$ en $D$, te berekenen in de rekenmachine, worden in het formulier ingeschreven; daarin worden nu ook gevonden:

$$x = X_c - X_d \quad \text{en} \quad y = Y_c - Y_d$$

Voor $Y_c - Y_m$ kan worden geschreven:

$$Y_c - Y_m = -(Y_m - Y_p) - (Y_p - Y_c)$$

waaruit:

$$Y_c - Y_m = (X_m - X_p)\, tg\, \overline{CD} - (X_p - X_c) \cot \overline{CD}$$

Stellende voor:

$tg\, \overline{CD} = x : y = n$ en voor: $\cot \overline{CD} = y : x = \frac{1}{n}$ en $N = n + \frac{1}{n}$

zoo is:

$$Y_c - Y_m = nX_m - nX_p - \frac{1}{n} X_p + \frac{1}{n} X_c$$

waaruit:

$$X_p \left(n + \frac{1}{n}\right) = nX_m + \frac{1}{n} X_c + Y_m - Y_c$$

zoodat tenslotte:

$$X_p = \left\{ nX_m + \frac{1}{n} X_c + Y_m - Y_c \right\} : N$$

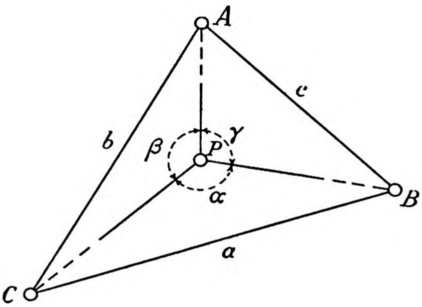
evenzoo is:

$$Y_p = \left\{ nY_c + \frac{1}{n} Y_m + X_m - X_c \right\} : N$$

FORMULIER N°. 16b.

OPLOSSING VAN HET VRAAGSTUK VAN SNELLIUS (METHODE VAN DE BARYCENTRISCHE COÖRDINATEN)

BEREKENING MET DE MACHINE




In nevenstaande figuur zijn $A$, $B$ en $C$ de bekende punten, $P$ is het te bepalen punt, waar gemeten zijn de hoeken $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$. De coördinaten van $P$ worden gevonden uit:

$$X_p = \frac{X_A u_1 + X_B u_2 + X_C u_3}{u_1 + u_2 + u_3} = \frac{[u\, X]}{[u]}$$

$$Y_p = \frac{Y_A u_1 + Y_B u_2 + Y_C u_3}{u_1 + u_2 + u_3} = \frac{[u\,Y]}{[u]}$$

waarin:

Methode van de barycentrische coördinaten

$$\frac{1}{u_1} = \text{cotg } A - \text{cotg } \alpha$$

$$\frac{1}{u_2} = \text{cotg } B - \text{cotg } \beta$$

$$\frac{1}{u_3} = \text{cotg } C - \text{cotg } \gamma$$

Voor de afleiding van deze formules wordt verwezen naar het artikel van Prof. J. M. Tienstra „*Puntvereffening door middel van voorwaarde vergelijkingen*" (Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, jaargang 1926 blz. 3 en vlg.)

De hoeken $A$, $B$ en $C$ kunnen worden gevonden uit de argumenten van de zijden of ook uit onderstaande formules:

$$\text{cotg } A = \frac{bc \cos A}{bc \sin A} = \frac{bc \cos (\overline{AC} - \overline{AB})}{bc \sin (\overline{AC} - \overline{AB})} = \frac{x_2\, x_3 + y_2\, y_3}{x_2 y_3 - y_2\, x_3}$$

Hieruit worden de uitdrukkingen voor cotg $B$ en cotg $C$ door cyclische verwisseling gevonden. De waarde van den noemer is in de drie betrekkingen gelijk. Stelt men deze waarde door $N$ voor, zoo wordt tenslotte gevonden:

$$\text{cotg } A = (x_2\, x_3 + y_2 y_3) : N$$

$$\text{cotg } B = (x_3\, x_1 + y_3 y_1) : N$$

$$\text{cotg } C = (x_1\, x_2 + y_1 y_2) : N$$

Hierin is:

$$x_1 = X_C - X_B \qquad y_1 = Y_C - Y_B$$

$$x_2 = X_A - X_C \qquad y_2 = Y_A - Y_C$$

$$x_3 = X_B - X_A \qquad y_3 = Y_B - Y_A$$

*Contrôle* op de berekening van cotg $A$, cotg $B$ en cotg $C$ en op de in den tafel opgezochte waarden cotg $\alpha$, cotg $\beta$ en cotg $\gamma$ vindt men in de betrekkingen:

$$\text{cotg } B \text{ cotg } C + \text{cotg } C \text{ cotg } A + \text{cotg } A \text{ cotg } B = 1$$

$$\text{cotg } \beta \text{ cotg } \gamma + \text{cotg } \gamma \text{ cotg } \alpha + \text{cotg } \alpha \text{ cotg } \beta = 1$$

De methode is *zeer* geschikt voor de berekening met de *machine*; de hiervoor gegeven betrekkingen zijn van *bijzondere regelmatigheid*; zij is evenals de methode van Cassini uitsluitend op *achterwaartsche insnijding* ingesteld.

De methode is onbruikbaar, wanneer de punten $A$, $B$ en $C$ op een rechte lijn zijn gelegen. Zij geeft de nauwkeurigste uitkomsten, wanneer de driehoek $ABC$ zoo veel mogelijk gelijkzijdig is en $P$ niet te dicht bij den omtrek van den omgeschreven cirkel van driehoek $ABC$ is gelegen.

## FORMULIER N°. 17

### BEREKENING DER COÖRDINATEN UIT VOORWAARTSCHE SNIJDING OF UIT SNIJDING VAN TWEE MEETLIJNEN

Bij de behandeling van formulier 15 is gebleken, dat dit formulier, ingericht voor logarithmische berekening, zeer geschikt is te gebruiken voor de berekening van de coördinaten van een punt $P$ uit twee voorwaartsche snijdingen $AP$ en $BP$.

Formulier n°. 17 geeft eveneens de oplossing voor dit vraagstuk onder gebruikmaking van de rekenmachine; het formulier kan tevens worden gebezigd voor de bepaling van de coördinaten van het snijpunt van twee meetlijnen, waarvan de eindpunten in coördinaten gegeven zijn.

Wanneer de voorwaartsche richtingen, dus de argumenten $\overline{BP}$ en $\overline{AP}$ ter berekening van het punt $P$ bekend zijn, kunnen zij onmiddellijk uit den Staat van Waarnemingen en Uitkomsten worden overgenomen in de laatste kolom van formulier 17. Zijn $\overline{BP}$ bekend en de niet geöriënteerde richtingen $(\overline{AP})$ en $(\overline{BP})$, dan berekent men uit het verschil $(\overline{BP}) - (\overline{AP})$, dat ook gelijk is aan $\overline{BP} - \overline{AP}$, het argument $\overline{AP}$. Als alleen $\overline{AP}$ bekend is, handelt men analoog. De berekening geschiedt vervolgens op grond van de volgende formules:

$$(Y_p - Y_b) \cdot \text{tg } \overline{BP} = X_p - X_b$$
$$(Y_p - Y_a) \cdot \text{tg } \overline{AP} = X_p - X_a$$

$$Y_p (\text{tg } \overline{BP} - \text{tg } \overline{AP}) = Y_b \text{ tg } \overline{BP} - Y_a \text{ tg } \overline{AP} - (X_b - X_a)$$

waaruit:

$$(Y_p - Y_b)(\text{tg } \overline{BP} - \text{tg } \overline{AP}) = (Y_b - Y_a) \text{ tg } \overline{AP} - (X_b - X_a)$$

In het formulier worden respectievelijk gesteld:

$$\text{tg } \overline{BP} - \text{tg } \overline{AP} = N; \; Y_b - Y_a = y \text{ en } X_b - X_a = x$$

zoodat:

$$Y_p - Y_b = (y \text{ tg } AP - x) : N$$

In het formulier worden verder gesteld:

$$(y \text{ tg } \overline{AP} - x) = T_b \text{ en } (y \text{ tg } \overline{BP} - x) = T_a$$

waaruit volgt:

$$Y_p - Y_b = T_b : N \qquad X_p - X_b = (Y_p - Y_b) \text{ tg } \overline{BP}$$

en:

$$Y_p - Y_a = T_a : N \qquad X_p - X_a = (Y_p - Y_a) \text{ tg } \overline{AP}$$

Contrôle op de berekening van $N$:

$$\text{tg } (\overline{BP} - \overline{AP}) = \frac{\text{tg } \overline{BP} - \text{tg } \overline{AP}}{1 + \text{tg } \overline{BP} \text{ tg } \overline{AP}}$$

waaruit:

$$\text{tg } (\overline{BP} - \overline{AP}) + \text{tg } (\overline{BP} - \overline{AP}) \text{ tg } \overline{BP} \text{ tg } \overline{AP} = N$$

De tweede term in het eerste lid wordt in het formulier „product" genoemd.

Bij de bepaling van het snijpunt $P$ van twee meetlijnen $BD$ en $AC$ worden de argumenten $\overline{BP}$ en $\overline{AP}$ resp. berekend uit de coördinatenverschillen:

$$X_d - X_b, \; Y_d - Y_b \text{ en } X_c - X_a, \; Y_c - Y_a$$

## § 8. BEREKENING VAN DE DEFINITIEVE COÖRDINATEN BIJ ENKELE PUNTSBEPALING (GELIJKE GEWICHTEN)

We stellen eerst het vraagstuk in zijn eenvoudigsten vorm. Ter bepaling van de coördinaten van een punt $P$ worden in dit punt richtingen gemeten naar een

**Binnen-richtingen**

aantal reeds in coördinaten R. D. bekende punten $A_n$. De bepaling geschiedt dus geheel door het meten van zoogenaamde *binnenrichtingen*.

De gemiddelden dezer richtingen, welke worden beschouwd als te zijn van gelijk gewicht, zijn vermeld in den Staat n°. 13 (kolom 3) als gemeten richtingen $\alpha$. Zij worden overgenomen in formulier n°. 19 en aldaar gesteld in kolom 2. De gevraagde (definitieve) coördinaten van het punt $P$ zijn $X_p$ en $Y_p$; de coördinaten der bekende punten aanduidende door $X_n$ en $Y_n$, worden de argumenten $\psi$ der richtingen voorgesteld door:

$$\psi = bg \text{ tang } \frac{X_n - X_p}{Y_n - Y_p}.$$

Op een der in de vorige hoofdstukken aangegeven methoden zijn de benaderde coördinaten van het punt $P$ berekend. Noemen we deze $X'_p$ en $Y'_p$, zoo worden de benaderde argumenten $\psi'$ voorgesteld door:

$$\psi' = bg \text{ tang } \frac{X_n - X'_p}{Y_n - Y'_p}$$

$$\psi = \psi' + \triangle \psi; \qquad X_p = X'_p + \triangle X; \qquad Y_p = Y'_p + \triangle Y$$

zoodat:

$$\psi' + \triangle \psi = bg \text{ tang } \frac{X_n - X'_p - \triangle X}{Y_n - Y'_p - \triangle Y}$$

of als men het tweede lid in een reeks volgens Taylor ontwikkelt:

$$\psi' + \triangle \psi = bg \text{ tang } \frac{X_n - X'_p}{Y_n - Y'_p} + a \triangle X + b \triangle Y + R$$

waaruit volgt:

$$\triangle \psi = a \triangle X + b \triangle Y + R$$

Hierin is:

$$a = -\varrho \frac{\cos \psi'}{l'}; \qquad b = +\varrho \frac{\sin \psi'}{l'}$$

$l'$ is de afstand $P'A_n$, $\varrho$ het aantal sekunden in een radiaal. De aangroeiing $\triangle \psi$ is in cc, $\triangle X$ en $\triangle Y$ zijn in meters uitgedrukt. Wanneer men zorg draagt, dat de plaats van het punt P voldoende door P' benaderd wordt, kan de restterm $R$ vervallen en mag men schrijven:

$$\triangle \psi = a \triangle X + b \triangle Y$$

De benaderde argumenten $\psi'$ en de richtingscoëfficiënten $a$ en $b$ worden berekend in formulier 12. De berekening der argumenten met de daarbij toe te passen contrôle, werd reeds toegelicht bij de behandeling van dit formulier.

**Bepaling der richtings-coëfficienten a en b**

Voor de berekening der *coëfficiënten a* en *b* wordt gebruik gemaakt van een tafel (zie bijlage). Ter toelichting op welke wijze deze tafel is samengesteld diene het volgende. Wij zagen hiervoor dat:

$$a = -\varrho \frac{\cos \psi'}{l'}; \qquad b = +\varrho \frac{\sin \psi'}{l'}.$$

Aangezien het gebruikelijk is $\triangle X$ en $\triangle Y$ in decimeters uit te drukken, is:

$$a = -\varrho \frac{\cos \psi'}{10\, l'}; \qquad b = +\varrho \frac{\sin \psi'}{10\, l'}$$

waarvoor kan worden geschreven:

$$a = -\varrho \frac{\sin 2 \psi'}{20\, x}; \qquad b = +\varrho \frac{\sin 2 \psi'}{20\, y}$$

Drukt men de coördinatenverschillen $x$ en $y$ uit in km zoo is:

$$a = -\varrho \frac{\sin 2\,\psi'}{20000\,x}; \qquad b = +\varrho \frac{\sin 2\psi'}{20000\,y}$$

of eindelijk:

$$a = \frac{N}{x}; \qquad b = \frac{N}{y}$$

waarin:

$$N = \frac{\varrho}{20000} \sin 2\,\psi'.$$

In de tafel is $N$ voor alle hoeken te vinden; voor hoeken van $2^{g}$—$10^{g}$ is deze waarde met een decimaal meer berekend. Beneden $2^{g}$ gaat men uit van de oorspronkelijke formules; $l'$ is dan gelijk te stellen aan $y$, zoodat men mag schrijven:

$$a = -\varrho \frac{\cos\,\psi'}{10\,y}; \qquad b = +\varrho \frac{\sin\,\psi'}{10\,y}.$$

Drukt men het ordinatenverschil uit in km, zoo is:

$$a = -\frac{L}{y}; \qquad b = +\frac{M}{y}$$

waarin:

$$L = \frac{\varrho}{10000} \cdot \cos\,\psi' \quad \text{en} \quad M = \frac{\varrho}{10000} \cdot \sin\,\psi'.$$

Bij hoeken van $98^{g}$—$100^{g}$ is $l'$ nagenoeg gelijk aan $x$ en is:

$$a = -\frac{L}{x}; \qquad b = +\frac{M}{x}.$$

Voor analoge waarden van $\psi'$ in de overige kwadranten wordt op soortgelijke wijze gehandeld met richtingen nabij de $X$- en $Y$-as, zoodals in de tafel nader is aangegeven.

Voor het vaststellen van de richtingscoëfficiënten zoekt men in de tafel bij de argumenten $\psi'$ en onder weglating van de honderdtallen van graden de waarde $N$, resp. $L$ en $M$ op. Na deeling door $x$, of $y$, uitgedrukt in km vindt men vervolgens de *absolute* waarden van $a$ en $b$. Het *teeken* dezer coëfficiënten stelt men *afzonderlijk* vast, waartoe men gebruik kan maken van een der teekenregels. De navolgende blijft het beste in het geheugen:

**Teekenregel**

„De teekens van $a$ en $b$ komen overeen met de teekens van resp. den sinus en den cosinus van een hoek, gelegen in het kwadrant, voorafgaande aan dat, waarin $\psi'$ is gelegen."

Als contrôle op de berekening van de richtingscoëfficiënten verdient het aanbeveling deze op twee manieren te bepalen.

**Berekening der richtingscoëfficiënten uit de aangroeiingen der logarithmen**

De richtingscoëfficiënten $a$ en $b$ kunnen ook op andere wijze worden bepaald. Wanneer men niet beschikt over een tafel en men met logarithmen werkt, wordt de volgende methode aanbevolen.

Men heeft:

$$\text{tang}\,(\psi' + \triangle\,\psi) = \frac{X_n - X'_p - \triangle\,X}{Y_n - Y'_p - \triangle\,Y} = \frac{x - \triangle\,X}{y - \triangle\,Y}$$

waaruit:

$$\log \text{tang} (\psi' + \triangle \psi) = \log (x - \triangle X) - \log (y - \triangle Y)$$

Noemt men $d \log \text{tang} \psi'$ de aangroeiing van logtang $\psi'$ voor 1 cc, $d \log x$ en $d \log y$ die van $\log x$ en $\log y$ voor 1 dm, zoo is :

$$\text{logtang } \psi' + \triangle \psi \, d \, \text{logtang } \psi' = \log x - \triangle X \, d \log x - \log y + \triangle Y \, d \log y$$

$$\text{logtang } \psi' = \log x - \log y$$

zoodat:

$$\triangle \psi = - \frac{d \log x}{d \, \text{logtang } \psi'} \triangle X + \frac{d \log y}{d \, \text{logtang } \psi'} \triangle Y$$

of:

$$\triangle \psi = a \triangle X + b \triangle Y,$$

waarin:

$$a = - \frac{d \log x}{d \, \text{logtang } \psi'} \text{ en } b = + \frac{d \log y}{d \, \text{logtang } \psi'}$$

Ook hier is het de veiligste weg om de *absolute* waarden van $a$ en $b$ te berekenen en de teekens *afzonderlijk* vast te stellen door middel van den *teekenregel.*

Wanneer de richtingscoëfficiënten worden verkregen door berekening uit de aangroeiingen der logarithmen, zoo zal men zich bij het vaststellen van $d \log x$ en $d \log y$ niet bepalen tot de naastliggende logarithmen, maar twee verder uit elkander gelegen logarithmen nemen. Men neme bijv. het tiende deel van de aangroeiing van de logarithme voor 1 meter, waardoor de vaststelling van de aangroeiing voor 1 dm nauwkeuriger wordt.

**Bepaling van de coëfficiënten a en b langs grafischen weg; nomogram**

De bepaling van $a$ en $b$ kan ook langs grafischen weg geschieden door middel van het bij deze handleiding verstrekte *nomogram.* Rechts van de verdeelde rechte lijn is de schaal der argumenten, links die der coördinatenverschillen; de rechte lijn zelve levert de schaal der coëfficiënten $a$ en $b$. Men zoekt op de rechterschaal het punt, hetwelk het argument aangeeft, op de linkerschaal het abscissenverschil $x$, resp. het ordinatenverschil $y$. De verbindingslijn dezer twee punten snijdt de lijn der coëfficiënten; het snijpunt levert de waarde van $a$, resp. die van $b$.

Het is voldoende de richtingscoëfficienten in één decimaal nauwkeurig vast te stellen. In de meeste gevallen kan zelfs met de geheele getallen worden volstaan.

Wij zagen hiervoor, dat de definitieve argumenten worden uitgedrukt door:

$$\psi = \psi' + \triangle \psi = \psi' + a \triangle X + b \triangle y$$

Ook is:

$$\psi = \alpha + v + O$$

waarin $\alpha$ de gemeten richtingen voorstellen, $v$ de aan die richtingen aan te brengen correctiën en $O$ de oriënteering der richtingen; voor $O$ wordt nog een benaderde waarde $O'$ ingevoerd, waarvoor een der waarden $\psi' - \alpha$ kan worden genomen. $O = O' + \triangle O$, waarin $\triangle O$ de onbekende oriënteeringscorrectie voorstelt. Men heeft derhalve:

$$\psi = \alpha + v + O' + \triangle O$$

waaruit:

$$v = \psi - (\alpha + O') - \triangle O$$

Voor $\psi$ de hierboven gegeven waarde substitueerende, wordt dus gevonden:

$$v = \psi' - (\alpha + O') + a \triangle X + b \triangle Y - \triangle O$$

De verschillen $\psi' - (\alpha + O') = f$ stellende, komt men tenslotte tot de *correctievergelijkingen*:

**Correctievergelijkingen**

$$v = f + a \triangle X + b \triangle Y - \triangle O.$$

Bij de vereffening dezer richtingen worden zij in het eenvoudigste geval genomen als te zijn van *gelijk gewicht*. Opgemerkt wordt, dat dit alleen dan eenigermate *juist is*, wanneer de bekende punten alle met gelijke nauwkeurigheid zijn bepaald en bovendien op gelijken afstand van het te bepalen punt zijn gelegen.

**Gewichten**

In alle andere gevallen voert de aanname van gelijke gewichten tot een vereffening, welke eigenlijk als een *benadering* moet worden beschouwd; deze benadering wordt *strenger*, naarmate meer aan de bovengestelde voorwaarden voldaan wordt. In vele gevallen mag het invoeren van gewichten bij het vereffenen der richtingen niet worden nagelaten, zooals in het verdere betoog zal blijken.

Worden aan de onderscheiden richtingen *gelijke gewichten* toegekend, dan zijn de *correctievergelijkingen*:

$$v_1 = f_1 + a_1 \triangle X + b_1 \triangle Y - \triangle O$$

$$v_2 = f_2 + a_2 \triangle X + b_2 \triangle Y - \triangle O \qquad \text{enz.}$$

In deze vergelijkingen moeten $\triangle X$, $\triangle Y$ en $\triangle O$ zoodanig worden bepaald, dat $[vv]$ minimum wordt.

Onder toepassing van het vraagstuk der indirecte waarnemingen volgen hieruit de *normaalvergelijkingen*:

**Normaalvergelijkingen**

$$[av] = [af] + [aa] \triangle X + [ab] \triangle Y - [a] \triangle O = o \qquad (1)$$

$$[bv] = [bf] + [ab] \triangle X + [bb] \triangle Y - [b] \triangle O = o \qquad (2)$$

$$-[v] = -[f] - [a] \triangle X - [b] \triangle Y + n \triangle O = o. \qquad (3)$$

Uit deze vergelijkingen is $\triangle O$ te elimineeren, door de normaalvergelijking (3) te vermenigvuldigen eerst met $\frac{[a]}{n}$, daarna met $\frac{[b]}{n}$ en de twee zoo verkregen vergelijkingen op te tellen resp. bij de 1e en 2e normaalvergelijking; daardoor ontstaan de *gereduceerde normaalvergelijkingen*:

**Gereduceerde normaalvergelijkingen**

$$1. \quad \left\{[af] - \frac{[a][f]}{n}\right\} + \left\{[aa] - \frac{[a]^2}{n}\right\} \triangle X + \left\{[ab] - \frac{[a][b]}{n}\right\} \triangle Y = o$$

$$2. \quad \left\{[bf] - \frac{[b][f]}{n}\right\} + \left\{[ab] - \frac{[a][b]}{n}\right\} \triangle X + \left\{[bb] - \frac{[b]^2}{n}\right\} \triangle Y = o$$

waarin alleen de onbekenden $\triangle X$ en $\triangle Y$ overblijven.

Het gebruik is om de coëfficiënten der gereduceerde normaalvergelijkingen te berekenen, zooals de „*Regel van Schreiber*" dit aangeeft. Men laat daartoe den term $-\triangle O$ in de correctievergelijkingen weg en voegt bij deze een nieuwe vergelijking, die de som is der overige vergelijkingen en aan welke het negatieve (gefingeerde) gewicht $-\frac{1}{n}$ wordt toegekend. Uit dit nieuwe stel vergelijkingen worden nu op de gewone wijze de coëfficiënten der normaalvergelijkingen opgemaakt.

Het formulier n°. 19 is voor deze rekenwijze ingericht. De coëfficiënten der correctievergelijkingen van de binnenrichtingen worden opgeteld. Onder de totalen

$[a]$, $[b]$, $[f]$ en $[s]$ wordt $-\frac{1}{n}$ dezer bedragen geschreven. Het opmaken van de coëfficiënten der normaalvergelijkingen geschiedt nu geheel automatisch, waardoor vergissingen zijn uitgesloten.

Substitueert men in de normaalvergelijkingen:

$$\triangle X = \triangle \overline{X} + 1 \qquad \text{en} \qquad \triangle Y = \triangle \overline{Y} + 1$$

dan worden zij:

$$[as] + [aa] \triangle \overline{X} + [ab] \triangle \overline{Y} - [a] \triangle O = 0$$
$$[bs] + [ab] \triangle \overline{X} + [bb] \triangle \overline{Y} - [b] \triangle O = 0$$
$$-[s] - [a] \triangle \overline{X} - [b] \triangle \overline{Y} + n \triangle O = 0$$

waarin $s = a + b + f$.

Voor de onbekenden $\triangle \overline{X}$, $\triangle \overline{Y}$ en $\triangle O$ spelen de grootheden $s$ dezelfde rol als de grootheden $f$ voor het stel onbekenden $\triangle X$, $\triangle Y$ en $\triangle O$. De afzonderlijke berekening van de eerste termen van bovenstaande vergelijkingen uit de betrekkingen:

$$[as] = [aa] + [ab] + [af]$$
$$[bs] = [ab] + [bb] + [bf]$$
$$[s] = [a] + [b] + [f]$$

levert de contrôle voor de berekening van *alle* in de normaalvergelijkingen voorkomende coëfficiënten, terwijl de berekening van $\triangle \overline{X}$ en $\triangle \overline{Y}$ uit de normaalvergelijkingen een contrôle geeft op de berekening van $\triangle X$ en $\triangle Y$.

Het voorgaande had uitsluitend betrekking op het bepalen van een nieuw punt $P$ uit *binnenrichtingen*.

**Bepaling van een punt uit buitenrichtingen**

Beschouwen wij thans het geval van bepaling van het punt $P$ uit *voorwaartsche snijding*, alzoo het bepalen van dit punt door metingen in reeds in de R.D. bekende of berekende punten (*buitenrichtingen*).

Wanneer men vanuit een reeds in de R. D. bekend punt de richting meet naar het te bepalen punt, moet deze *buitenrichting* georiënteerd worden. Nemen we aan, om de gedachte te bepalen, dat de buitenrichting met drie richtingen naar bekende punten in één serie is opgenomen. De argumenten dezer drie richtingen worden in formulier n°. 12 berekend.

In formulier 13 „Staat van Waarnemingen en Uitkomsten" kan dan worden ingevuld:

| | argumenten $\varphi$ | gemeten richtingen $\alpha$ | $\varphi - \alpha$ |
|---|---|---|---|
| onbekend punt | | $\alpha_1$ | |
| bekend punt | $\varphi_2$ | $\alpha_2$ | $\varphi_2 - \alpha_2$ |
| „ „ | $\varphi_3$ | $\alpha_3$ | $\varphi_3 - \alpha_3$ |
| „ „ | $\varphi_4$ | $\alpha_4$ | $\varphi_4 - \alpha_4$ |

Voor de oriënteering $O$ wordt gevonden:

$$O = \frac{\varphi_2 - \alpha_2 + \varphi_3 - \alpha_3 + \varphi_4 - \alpha_4}{3}$$

De *geöriënteerde* richting naar het onbekende punt is dan:

$$\alpha_1 + O = \alpha_1 + \frac{\varphi_2 - \alpha_2 + \varphi_3 - \alpha_3 + \varphi_4 - \alpha_4}{3}$$

Let men niet op de fouten in de gegeven punten, dan vindt men volgens de voortplantingswet der fouten voor de middelbare fout van deze richting als gevolg van de meting:

**Gewicht eener voorwaartsche richting**

$$m^2_{\alpha_1+0} = m^2_{\alpha_1} + \frac{1}{9} m^2_{\alpha_2} + \frac{1}{9} m^2_{\alpha_3} + \frac{1}{9} m^2_{\alpha_4}.$$

Aangezien $m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2} = \ldots\ldots\ldots m$, zoo is dus:

$$m^2_{\alpha_1} + 0 = \frac{4}{3} m^2.$$

Hieruit volgt dus, dat als de richting naar het onbekende punt is opgenomen in een serie van $n$ richtingen van gelijk gewicht, waarvan $n - 1$ naar bekende punten R. D., het *gewicht van de geöriënteerde richting* zal zijn $(n - 1) : n$.

In den regel neemt men bij buitenrichtingen het gewicht *gelijk aan* 1, hetgeen bij een niet te klein aantal richtingen een onschadelijke benadering is. De benadering wordt dus strenger naarmate men meer bekende punten opneemt in de serie ter bepaling van de oriënteering naar het onbekende punt.

De correctievergelijking van een voorwaartsche richting $\alpha$ wordt als volgt gevonden. Zij $\psi$ het argument van de verbindingsrichting van het te bepalen punt $P$ met het bekende punt $A$, dan is $\psi = \alpha + 200^g + v$. Is weer $\psi = \psi' + \triangle \psi$, verder:

$$\triangle \psi = a \triangle X + b \triangle Y \qquad \text{en:}$$

$$f = \psi' - (\alpha + 200^g)$$

**Correctievergelijkingen voor buiten richtingen**

zoo verkrijgt men voor $v$:

$$v = f + a \triangle X + b \triangle Y.$$

Hierin behooren $a$ en $b$ bij het argument der achterwaartsche richting $PA$. De correctievergelijkingen worden dus berekend, zooals bij achterwaartsche richtingen is uiteengezet.

Een puntsbepaling met uitsluitend buitenrichtingen bevat derhalve slechts twee onbekenden. De normaalvergelijkingen worden:

$$[av] = [af] + [aa] \triangle X + [ab] \triangle Y = 0$$

$$[bv] = [bf] + [ab] \triangle X + [bb] \triangle Y = 0.$$

De berekening geschiedt in het formulier op analoge wijze als voor de achterwaartsche richtingen, vanzelf sprekend met dit verschil, dat reductie hier niet van toepassing is.

Na deze algemeene beschouwingen zal de invulling en de gang der bewerking in de afdeelingen van het formulier 19 geen moeilijkheden opleveren. Ter toelichting nog het volgende.

**Formulier 19; enkele puntsbepaling uit richtingen met gelijk gewicht**

In afdeeling 1 worden buiten- en binnenrichtingen onderscheiden. Eerstgenoemde worden vooraf behandeld; de gemeten richtingen $(\alpha + 200^g)$ worden ingevuld in kolom 2, de waarden $\psi'$ worden vervolgens vermeld in kolom 4; daarna volgen de richtingscoëfficiënten $a$ en $b$, de verschillen $f = \psi' - (\alpha + 200^g)$, tenslotte de sommen $s = a + b + f$.

De gegevens, betrekking hebbende op de buitenrichtingen, worden afgesloten met een horizontale lijn.

**Invulling van formulier 19 1e afdeeling**

Onder deze lijn worden de gegevens betreffende de binnenrichtingen ingeschreven. Alle richtingen $\alpha$ krijgen de oriënteering $O'$, welke op den laatsten regel van

kolom 2 wordt geplaatst; voor deze oriënteering wordt in het algemeen genomen het verschil tusschen de $\psi'$ en $\alpha$ van een der punten.

De richtingen $\alpha + O'$ worden in kolom 3 geplaatst; als contrôle op deze bewerking worden de richtingen $\alpha$ gesommeerd tot $[\alpha]$; daarbij wordt $n$ maal de oriënteering opgeteld; de som moet gelijk zijn aan de som der richtingen $\alpha + O'$ in de 3e kolom.

Vervolgens worden de verschillen $f = \psi' - (\alpha + O')$ ingeschreven; contrôle hierop hierop wordt verkregen door de richtingen $\psi'$ op te tellen en daarvan af te trekken de som der richtingen $\alpha + O'$. Het verschil moet overeenstemmen met $[f]$. Tenslotte wordt de kolom $s = a + b + f$ ingevuld, waarmede de gegevens voor het opmaken van de coëfficiënten der normaalvergelijkingen alle aanwezig zijn.

Zooals bij de algemeene beschouwingen reeds is opgemerkt kan het opmaken van de coëfficiënten der normaalvergelijkingen thans geheel automatisch plaats hebben. Na de invulling der verschillende waarden voor $a$, $b$, $f$ en $s$ in de kolommen 5—8 worden aan den voet dezer kolommen de op de binnenrichtingen betrekking hebbende $[a]$, $[b]$, $[f]$ en $[s]$ verkregen en daar onder gesteld resp. de waarden $-\frac{1}{n}[a]$, $-\frac{1}{n}[b]$, $-\frac{1}{n}[f]$ en $-\frac{1}{n}[s]$.

Wanneer men *niet* beschikt over een rekenmachine, wordt voor de verdere berekening gebruik gemaakt van formulier 23 en worden in de daarvoor te bestemmen kolommen de kwadraten en producten $aa$, $ab$, $af$ enz. ingevuld, eerst voor de buiten- daarna voor de binnenrichtingen; als laatste in de onderscheiden kolommen worden de uitsluitend op de binnenrichtingen betrekking hebbende producten $-\frac{[a]\,[a]}{n}$, $-\frac{[a]\,[b]}{n}$, $-\frac{[a]\,[f]}{n}$ enz. ingeschreven.

De algebraische sommen dier producten leveren tenslotte de coëfficiënten der normaalvergelijkingen met reductie voor de binnenrichtingen; zij worden ingevuld in afdeeling 2 van het formulier 19.

Maakt men gebruik van de rekenmachine, dan worden de verschillende producten niet afzonderlijk ingeschreven en komen hunne sommen ineens in het resultaatwerk der machine te voorschijn, waarna zij onmiddellijk in de afdeeling 2 kunnen worden ingevuld. Contrôle op deze coëfficiënten heeft men, doordat de waarden $[as]$, $[bs]$, $[fs]$ worden gevonden als sommen der waarden $[aa]$, $[ab]$, $[af]$ enz., terwijl ze ook afzonderlijk worden berekend.

Afdeeling 3 geeft de oplossing der normaalvergelijkingen.

**Oplossing normaalvergelijkingen**

Ter toelichting diene:

1. $[aa]\,\Delta X + [ab]\,\Delta Y + [af] = 0$
2. $[ab]\,\Delta X + [bb]\,\Delta Y + [bf] = 0.$

Vermenigvuldigt men achtereenvolgens de 2e normaalvergelijking met $\frac{[ab]}{[bb]} = \mathrm{I}$, de 1e met $\frac{[ab]}{[aa]} = \mathrm{II}$, dan komt er:

3. $\frac{[ab]^2}{[bb]}\,\Delta X + [ab]\,\Delta Y + \frac{[ab]\,[bf]}{[bb]} = 0$

4. $[ab]\,\Delta X + \frac{[ab]^2}{[aa]}\,\Delta Y + \frac{[ab]\,[af]}{[aa]} = 0$

waaruit:

$$1. — 3. \qquad \left\{[aa] - \frac{[ab]^2}{[bb]}\right\} \triangle X = -\left\{[af] - \frac{[ab]\,[bf]}{[bb]}\right\}$$

$$2. — 4. \qquad \left\{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}\right\} \triangle Y = -\left\{[bf] - \frac{[ab]\,[af]}{[aa]}\right\}.$$

De notatie van Gauss invoerende is:

$$[aa \cdot 1] \triangle X = -[af \cdot 1] \quad \text{of} \quad \triangle X = -\frac{[af \cdot 1]}{[aa \cdot 1]}$$

$$\text{evenzoo is: } \triangle Y = -\frac{[bf \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}.$$

**Contrôle op berekening van $\triangle X$ en $\triangle Y$**

De contrôle op de berekening van $\triangle X$ en $\triangle Y$ vindt men in de berekening van $\triangle \overline{X}$ en $\triangle \overline{Y}$, welke in de laatste kolom van afdeeling 3 op geheel analoge wijze wordt uitgevoerd als die van $\triangle X$ en $\triangle Y$. Het resultaat is, dat $\triangle \overline{X}$ de waarde $\triangle X - 1$ moet opleveren en $\triangle \overline{Y}$ de waarde $\triangle Y - 1$.

In *afdeeling* 4 volgt nu de berekening van $[vv]$ en van $m$ volgens de betrekkingen:

$$[vv] = [f'f'] + [a'f'] \triangle X + [b'f'] \triangle Y \qquad ^{1)}$$

$$m^2 = \frac{[vv]}{n-3}.$$

**Berekening van middelbare fouten**

Het cijfer 3 in de laatste betrekking is het aantal onbekenden $\triangle X$, $\triangle Y$ en $\triangle O$. Geschiedt de berekening *uitsluitend* uit buitenrichtingen, dan vervalt $\triangle O$ als onbekende en wordt:

$$m^2 = \frac{[vv]}{n-2}.$$

De kwadraten van de middelbare fouten in de coördinaten vindt men als:

$$M_x^2 = \frac{m^2}{[aa \cdot 1]} \text{ en } M_y^2 = \frac{m^2}{[bb \cdot 1]}.$$

De definitieve coördinaten worden tenslotte ingeschreven als:

$$X_p = X_p' + \triangle X \quad \text{en} \quad Y_p = Y_p' + \triangle Y.$$

De kolommen 9—14 van afdeeling 1 kunnen thans worden ingevuld, nl. eerst $a \triangle X$ en $b \triangle Y$ en daarna $\triangle \psi = a \triangle X + b \triangle Y$. Uit de betrekking $v = a \triangle X + b \triangle Y + f - \triangle O$ voor de binnenrichtingen volgt dat:

$$f + \triangle \psi = v + \triangle O.$$

De som der onderscheiden bedragen $f + \triangle \psi$ is dus $[v] + n \triangle O$; daar $[v] = o$, is $[v + \triangle O] = n \triangle O$, waaruit de waarde van $\triangle O$ volgt als $[v + \triangle O] : n$.

Thans kan de kolom 13 voor de $v$'s worden ingevuld, vooraf de waarden voor de buitenrichtingen $v = f + \triangle \psi$, daarna die voor de binnenrichtingen $v = f + \triangle \psi - \triangle O$; de som van deze laatste is nul (contrôle).

In de laatste kolom worden berekend de richtingen $\psi = \psi' + \triangle \psi$. Haar som verminderd met $[\triangle \psi]$ moet weer overeenkomen met $[\triangle \psi']$ in de 4e kolom (contrôle). In de ruimte onder de laatste kolommen wordt, uitgaande van de waarden

1) $[f'f'] = [ff] - \frac{1}{n}[f]^2$; $[a'f']$ en $[b'f']$ zijn de analoge uitdrukkingen.

Berekening van de definitieve argumenten $\psi$ in formulier 12

$v$ van kolom 13, ingevuld $[vv]$. De hiervoor gevonden waarde moet overeenstemmen met het voor $[vv]$ in de afdeeling 4 berekende bedrag.

In het formulier n°. 12 worden tenslotte met behulp van de thans vastgestelde coördinaten de *definitieve* waarden van $\psi$ berekend.

## § 9. BEREKENING VAN DE DEFINITIEVE COÖRDINATEN BIJ ENKELE PUNTSBEPALING. (ONGELIJKE GEWICHTEN).

Beteekenis der middelbare fouten $M_x$ en $M_y$

De middelbare fouten in de coördinaten van een punt $P$ leveren een maatstaf ter beoordeeling van de nauwkeurigheid in de ligging van dit punt. Deze middelbare fouten geven evenwel in het algemeen een onvolledige voorstelling van die nauwkeurigheid, daar zij gebonden zijn aan de richting der coördinatenassen, aan een toevalligheid dus. Wanneer men deze assen achtereenvolgens andere richtingen geeft, komen voor $M_x$ en $M_y$ telkens andere waarden te voorschijn.

Fouten-kromme

Fouten-ellips

Voor een volledige beoordeeling der nauwkeurigheid moet men al deze waarden in de beschouwing betrekken. Een samenvatting van de verschillende waarden voor $M_x$ en $M_y$ leidt dan tot de zoogenaamde foutenkromme van het punt $P$, welke gevormd wordt door de voetpuntskromme van een ellips, die fouten-*ellips* wordt genoemd. De voetpuntskromme is de meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen, welke uit het middelpunt der ellips op opeenvolgende raaklijnen worden neergelaten. Daar de foutenkromme bepaald is, als de foutenellips bekend is, zijn voor de volledige kennis van de nauwkeurigheid *drie* gegevens noodig nl. de lengten van de assen der ellips en de richting dier assen.

Wanneer de foutenellips een *cirkel* is, dan is ook de voetpuntskromme een cirkel en is in dit geval één gegeven, n.l. de *straal* van den cirkel voldoende voor de kennis der nauwkeurigheid.

Cirkelvormige foutenkromme bij de punten der R. D.

Van de punten, waarvan men gebruik maakt ter bepaling van een nieuw punt $P$ is in den regel de foutenkromme niet bekend. Dit is trouwens niet noodig ook, omdat het streng in rekening brengen van de fouten in de gegeven punten tot een voor de practijk noodelooze omslachtigheid zou voeren. Het is voldoende benaderingsgewijs te werk te gaan en wel als volgt. Voor de gegeven punten worden voor de foutenkrommen cirkels aangenomen. De straal van deze cirkels stelle men op 3 cm voor punten van de R. D. en punten in het gebied I; op 6 cm voor punten in het gebied II op 12 cm voor punten in het gebied III.

Wordt van uit $P$ gericht op een punt A gelegen op een afstand $l$, zoo is, wanneer de middelbare fout voor de richting $PA$ wordt aangeduid door $m_t$:

$$m_t^2 = m^2 + m_A^2$$

Middelbare fout in de richting

waarin $m$ de middelbare fout in de richting voorstelt als gevolg van de meting, terwijl $m_A$ in hoekmaat kan worden berekend uit:

$$m_A = \frac{d}{l}\,\varrho \quad (d \text{ straal cirkelv. foutenkromme}).$$

De ervaring heeft geleerd, dat voor den zelfden waarnemer en het zelfde hoekmeetinstrument de waarde van $m$ vrijwel constant is, zoodat voor $m$ een vast bedrag kan worden genomen.

Bij puntsbepaling uit richtingen naar punten op zeer korten afstand, kan $m_A$ een waarde hebben, belangrijk grooter dan $m$, zoodat in de betrekking:

$$m_t^2 = m^2 + m_A^2$$

$m$ van ondergeschikte beteekenis zal zijn; $m_t$ zal dan ongeveer gelijk zijn aan $m_A$, zoodat $m_t$ nagenoeg gelijk is te stellen aan $\frac{d}{l}\,\varrho$ en:

$$m_t^2 = \left(\frac{d}{l}\,\varrho\right)^2.$$

Gewichten zijn in het algemeen omgekeerd evenredig met de kwadraten der middelbare fouten. Voor het bijzondere geval van richtpunten op zoodanige afstanden, dat de middelbare fout $m$ verwaarloosd kan worden, zouden derhalve volgens vorenstaande betrekking de aan de *richtingen* toe te kennen *gewichten evenredig* kunnen worden genomen met de *kwadraten van de afstanden.*

**Gewichten van richtingen op korten afstand**

Naarmate de afstanden grooter worden zal ook de middelbare fout $m$ haar invloed doen gelden bij de bepaling van het gewicht der onderscheiden richtingen en zal dit gewicht worden berekend uit de betrekking:

$$\frac{K}{g} = m^2 + C\,\frac{d^2}{l^2}$$

Hierin stelt $g$ het gevraagde gewicht voor; $C$ is een constante waarvan de waarde is $\left(\frac{\varrho}{100000}\right)^2 = 40{,}53$ als $d$ is uitgedrukt in cm, $l$ in km; $K$ is eveneens een constante, waarvoor in het bijgevoegde nomogram 196 is genomen.

Bij de bovenstaande beschouwingen is van de gedachte uitgegaan, dat bij het instellen van voorwerpen op verschillende afstanden gelegen, de nauwkeurigheid van de instelling gelijk is. Zijn de atmosferische omstandigheden gunstig (geen nevel, geen ondulatie), dan zal dit wel het geval zijn. Men kan dan min of meer rigoureus bovenstaande theorieën toepassen en daarmee in gevallen met sterk verschillende afstanden tot bevredigender resultaten komen, dan bij de aanname van gelijke gewichten.

In de gewone landmeetkundige practijk moet dikwijls onder betrekkelijk ongunstige omstandigheden worden gewerkt. Ieder geval zal nu op zich zelf moeten worden beschouwd en de moeilijkheden om eenigermate rationeel te werk te gaan zijn aanzienlijk verzwaard. Wenscht men nu toch gewichten aan de richtingen toe te kennen, dan zal men met omzichtigheid te werk moeten gaan. Men kan trachten de theorie te benaderen door het invoeren van een met den afstand wisselende correctie voor den straal $d$ van den foutencirkel. De grootte van deze correctie zal telkens aan de practijk moeten worden ontleend.

Stel het geregeld voorkomende geval, dat men ter bepaling van een driehoekspunt, in dit punt metingen verricht naar omliggende in de R. D. bekende torens, gelegen op afstanden van 1 tot 5 km; de metingen geschieden in de middaguren, de gewone ondulatieverschijnselen treden daarbij op, met als gevolg, dat de torencentra zich in den kijker onrustig en onduidelijk vertoonen, waardoor zij minder nauwkeurig zijn waar te nemen. De onrust en daarmede de onnauwkeurigheid zal toenemen, naarmate de afstand grooter wordt.

Om de gedachten te bepalen nemen wij aan, dat de middelbare fout $m$ op 5 ccg wordt berekend en dat voor den straal van den foutencirkel van de bekende punten 3 cm kan worden genomen. Stellen wij nu, dat dit laatste bedrag in verband met den atmosferischen toestand zijn werkelijke waarde nog behoudt tot op een afstand van 1 km. Voor de verbindingsrichtingen op grooteren afstand zal men ten gevolge van de ondulatie genoodzaakt zijn deze waarde, in verband met de groeiende onzekerheid van de instelling geleidelijk op te voeren.

**Bepaling van het gewicht eener binnenrichting**

Op grond van eigen beoordeeling zal de waarnemer hiervoor een gedragslijn moeten vaststellen; nemen we aan, dat hij de toename beoordeelt op 1 cm per km. Wanneer men de hiervoren gevonden formule voor de berekening van het gewicht toepast met geleidelijke wijziging van de waarde *d*, zal het blijken, dat binnen de gestelde afstanden van 1 tot 5 km de gewichten der onderscheiden richtingen in verhouding tot elkander zullen varieeren tusschen de grenzen 1 en 2.

Bij stilstaande beelden, waarbij de straal van den foutencirkel voor alle richtingen *ongewijzigd* op 3[1]) cm kan worden gehandhaafd zal genoemde verhouding blijken te wisselen tusschen de grenzen 1 en 5. In het eerste geval heeft derhalve het invoeren van gewichten weinig beteekenis; in het tweede geval zal het aanbrengen van gewichten tot een nauwkeuriger eindresultaat leiden en dus moeten worden aanbevolen.

De landmeetkundige practijk levert telkens variëerende gevallen, die tusschen en naast de hier gestelde kunnen worden gerangschikt.

**Grafische bepaling van het gewicht eener richting door middel van een nomogram**

In de bijlagen van deze handleiding wordt verstrekt een „*Nomogram voor de bepaling van het gewicht eener richting*", hetwelk het hier behandelde vraagstuk in al zijn variaties langs grafischen weg oplost. Aan de rechterzijde van het nomogram bevindt zich een vertikale lijn, aangevende de waarden van *m* van 3 tot 10 centesimale sekunden. Ter linkerzijde is aangebracht de eveneens op een vertikale lijn voorgestelde schaal voor de eventueel in te voeren waarden *d*. De op beide schalen op te zoeken punten worden verbonden door een rechte lijn, die de vertikale lijn, aangevende den afstand, zal snijden. Het snijpunt zal blijken gelegen te zijn op of nabij een der stralen, uitgaande van het buiten de teekening vallende middelpunt van het nomogram. Deze straal volgende tot den rand van het nomogram, zal het gewicht van de betreffende richting op dien rand worden afgelezen.

**Gewicht eener buitenrichting**

Ook bij de bepaling van een punt uit *buitenrichtingen*, dus uit richtingen van reeds bekende punten *naar* het te bepalen punt, zal men rekening moeten houden met de nauwkeurigheid in de ligging der bekende punten. Een behandeling van dit vraagstuk leidt tot het resultaat, dat voor de vaststelling van het gewicht eener buitenrichting *dezelfde* regel kan gelden als voor die eener binnenrichting, mits deze richting is geöriënteerd met behulp van een voldoend aantal richtingen naar bekende punten en deze laatste op grooten afstand zijn gelegen.

**Formulier 20; enkele puntsbepaling uit richtingen met ongelijk gewicht**

Het vraagstuk der enkele puntsbepaling uit richtingen met *ongelijk gewicht* wordt opgelost onder gebruikmaking van het formulier n°. 20. Ter toelichting van dit formulier diene het volgende.

Kent men aan de gemeten richtingen verschillend gewicht toe, zoo zal men uit de correctievergelijkingen voor de binnenrichtingen:

$$v_1 = f_1 + a_1 \triangle X + b_1 \triangle Y - \triangle O \qquad \text{gewicht } g_1$$
$$v_2 = f_2 + a_2 \triangle X + b_2 \triangle Y - \triangle O \qquad \text{,, } g_2$$

enz. tot bijv. index $n$ — enz.

komen tot de normaalvergelijkingen:

$$[gav] = [gaf] + [gaa] \triangle X + [gab] \triangle Y - [ga] \triangle O = 0$$
$$[gbv] = [gbf] + [gab] \triangle X + [gbb] \triangle Y - [gb] \triangle O = 0$$
$$-[gv] = -[gf] - [ga] \triangle X - [gb] \triangle Y + [g] \triangle O = 0$$

[1]) Eventueel 6 of 12 cm voor punten van gebied II, resp. III.

waaruit de gereduceerde normaalvergelijkingen:

$$\left\{[gaf]-\frac{[ga]\,[gf]}{[g]}\right\}+\left\{[gaa]-\frac{[ga]^2}{[g]}\right\}\triangle X+\left\{[gab]-\frac{[ga]\,[gb]}{[g]}\right\}\triangle Y=0$$

$$\left\{[bgf]-\frac{[gb]\,[gf]}{[g]}\right\}+\left\{[gab]-\frac{[ga]\,[gb]}{[g]}\right\}\triangle X+\left\{[gbb]-\frac{[gb]^2}{[g]}\right\}\triangle Y=0.$$

Uit de correctievergelijkingen voor de buitenrichtingen:

$v_1 = f_1 + a_1 \triangle X + b_1 \triangle Y$ gewicht $g_1$

$v_2 = f_2 + a_2 \triangle X + b_2 \triangle Y$ „ $g_2$

enz. enz.

volgen de normaalvergelijkingen:

$$[gav] = [gaf] + [gaa] \triangle X + [gab] \triangle Y = 0$$

$$[gbv] = [gbf] + [gab] \triangle X + [gbb] \triangle Y = 0$$

De practijk is ook hier, dat uit de gezamenlijke correctievergelijkingen zoowel voor de binnen- als voor de buitenrichtingen de eindnormaalvergelijkingen automatisch worden gevonden, waarbij voor de binnenrichtingen de reductie is toegepast.

Verder is:

$$[gvv] = [gf'f'] + [ga'f'] \triangle X + [gb'f'] \triangle Y \qquad [1]$$

terwijl $\mu$, de middelbare fout van de gewichtseenheid, wordt gevonden uit:

$$\mu^2 = \frac{[gvv]}{n-3}.$$

Tenslotte vindt men $M_X$ en $M_Y$ uit:

$$M_X^2 = \frac{\mu^2}{[gaa \cdot 1]} \qquad \text{en} \qquad M_Y^2 = \frac{\mu^2}{[gbb \cdot 1]}.$$

## § 10. BIJZONDERE GEVALLEN DER PUNTSBEPALING ALGEMEENE OPMERKINGEN

Het komt voor, dat niet alle richtingen, ter bepaling van een punt uit binnenrichtingen, gezamenlijk worden opgenomen. Dit geval doet zich steeds voor, als enkele richtingen op een excentrische standplaats moeten worden waargenomen of ook wanneer de opstellingsplaats het noodig maakt kleinere series te meten. Ook kunnen bijzondere invloeden, als bijv. pijlerdraaiing, het wenschelijk maken kleine series te meten.

**Richtingsmeting in meer series**

Principiëel ondergaat de vereffening hierdoor geen verandering. Zijn de richtingen bijv. in *twee* series opgenomen, dan bepaalt men van ieder dezer de bijdragen tot de coëfficiënten der gereduceerde normaalvergelijkingen. De bewerking der reductie zal men derhalve tweemaal moeten uitvoeren, eenmaal ter eliminering van $\triangle O_1$ en eenmaal voor $\triangle O_2$.

Het aantal onbekenden wordt dan 4, zoodat er $n - 4$ overtollige waarnemingen zijn. Men zal dus krijgen:

$$m^2 = \frac{[vv]}{n-4} \text{ en bij ongelijke gewichten } \mu^2 = \frac{[gvv]}{n-4}.$$

**Voordeelen van hoekmeting**

Als bijzonder geval der richtingsmeting in meer series is de hoekmeting te beschouwen. Zij kan in sommige gevallen voordeelen hebben boven richtings-

[1] $[gf'f'] = [gff] - \frac{1}{[g]}[gf]^2$; $[ga'f']$ en $[gb'f']$ zijn de analoge uitdrukkingen.

metingen. De meting van een hoek loopt n.l. snel af, waardoor storende invloeden minder nadeel veroorzaken.

Men houde bij de keuze der te meten hoeken het beginsel in het oog, dat bij nagenoeg gestrekte hoeken de fout in de gegeven punten den kleinsten invloed heeft op het resultaat. Verder drage men zorg, dat de bij de hoeken behoorende cirkelbogen als meetkundige plaats van het te bepalen punt, gunstige snijdingen opleveren. Voor een goede bepaling is het meten van een 5-tal hoeken in den regel voldoende.

De correctievergelijkingen resp. behoorende bij de richtingen, die de beenen van den hoek vormen, zijn bij ongelijke gewichten voor die richtingen:

$$v_1 = f_1 + a_1 \triangle X + b_1 \triangle Y - \triangle O \qquad \text{gewicht } g_1$$
$$v_2 = f_2 + a_2 \triangle X + b_2 \triangle Y - \triangle O \qquad \text{,,} \quad g_2$$

De bijdrage van deze serie tot bijv. de eerste kwadratische term van de gereduceerde normaalvergelijkingen is:

$$g_1 a_1 a_1 + g_2 a_2 a_2 - \frac{(g_1 a_1 + g_2 a_2)^2}{g_1 + g_2} = \frac{g_1 g_2 a_1^2 - 2 g_1 g_2 a_1 a_2 + g_1 g_2 a_2^2}{g_1 + g_2} =$$
$$= \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2} (a_1 - a_2)^2.$$

Bij gelijk gewicht voor de beenen van den hoek wordt deze uitdrukking:

$$\frac{(a_1 - a_2)^2}{2}.$$

Men kan dus in plaats van de beide correctievergelijkingen hierboven stellen de eene:

$$v = f_1 - f_2 + (a_1 - a_2) \triangle X + (b_1 - b_2) \triangle Y \text{ gew. } \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2}$$

waarin *v de verbetering van den hoek* voorstelt.

Tot dezelfde uitkomst voert de volgende afleiding.

Zijn $m_1$ en $m_2$ de middelbare fouten in de richting van linker- en rechterbeen van den hoek, dan is, de middelbare fout in dien hoek $m_h$ noemende:

$$m_h^2 = m_1^2 + m_2^2$$

en dus:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = \frac{g_1 + g_2}{g_1 g_2}$$

of:

$$g = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2} \qquad \text{(zie hiervoren).}$$

Enkele opmerkingen betreffende de meting en keuze der richtingen bij de bepaling van een nieuw punt ten opzichte van reeds bekende punten mogen hier nog een plaats vinden.

Wanneer men bij de puntsbepaling voor de coördinaten van het nieuwe punt middelbare fouten vindt, welke sterk uiteenloopen, wijst dit op een ongunstigen vorm van de foutenkromme. Het kan voorkomen, dat de grootste dezer middelbare fouten het bedrag, dat men zich als limiet gesteld had, overschrijdt. Wenscht men een dergelijke bepaling te verbeteren, dan heeft het weinig of geen nut de metingen

nogmaals te verrichten, tenzij duidelijk is aan te wijzen, dat deze met onvoldoende nauwkeurigheid zijn uitgevoerd.

Dit laatste geval daargelaten, wordt een *ongunstige vorm der foutenkromme* door de nieuwe, zelfs door betere metingen niet gewijzigd. Deze vorm hangt n.l. uitsluitend af van de meetkundige omstandigheden, d.w.z. van de ligging van het te bepalen punt ten opzichte van de gegeven punten. Deze ligging is het gunstigst, wanneer het niet te geringe aantal richtingen van het te bepalen punt naar de bekende punten regelmatig over den horizont is verdeeld.

**Keuze der richtingen bij puntsbepaling**

Overschrijden de resultaten de gestelde limiet, zoo zal men nagaan of de omstandigheden alsnog te wijzigen zijn door aanvulling met gunstiger gelegen richtingen. Meestal echter zal dit bij de verkenning reeds zijn overwogen, maar niet uitvoerbaar zijn bevonden. In een dergelijk geval kan een verbetering nog bereikt worden door het meermalen meten van de richtingen naar bijzonder goed gelegen punten door opname in meer series van meting of, in sommige gevallen, door in plaats van richtingen, zooveel mogelijk gunstig gelegen *hoeken* te meten.

Naast het *aantal* der gemeten richtingen is verder van belang de omstandigheid, dat het te bepalen punt tusschen de gegeven punten in is gelegen, waardoor men dus *interpoleert*.

Heeft men de beschikking over slechts enkele verbindingspunten, dan is het raadzaam de meetnauwkeurigheid zoo hoog mogelijk op te voeren, door de metingen te verrichten bij de gunstigste atmosferische toestanden. Bij een gering aantal richtingen moet men zich bovendien zekerheid verschaffen, wat betreft de identiteit van de gegeven punten en van derzelver betrouwbaarheid. Een bezoek aan deze punten, informatie ter plaatse, zoo noodig — en zoo mogelijk — een contrôle-centreering, is ten zeerste aan te bevelen.

Een behoorlijk overleg en een met zorg uitgevoerde verkenning van het terrein zal teleurstellingen in het algemeen kunnen voorkomen.

## § 11. BEREKENING VAN DE COÖRDINATEN BIJ DUBBELE PUNTSBEPALING

Het kan voorkomen, dat het wenschelijk is twee punten gezamenlijk te vereffenen. Dit zal o.a. het geval zijn, wanneer deze punten door een wederzijdsche richting zijn verbonden, terwijl de richtingen naar de bekende punten elkander aanvullende gedeelten van den horizont bestrijken.

Het op te lossen vraagstuk is dat der *dubbele puntsbepaling*; het bevat *zes* onbekenden, te weten $\triangle X_1$, $\triangle Y_1$ en $\triangle O_1$ voor het eene punt en $\triangle X_2$, $\triangle Y_2$ en $\triangle O_2$ voor het tweede. Op een der bekende wijzen worden voor beide punten de benaderde coördinaten berekend en daaruit de benaderde argumenten $\psi'$.

**Dubbele puntsbepaling uit richtingen van gelijk gewicht**

Nemen wij aan, dat in de te bepalen punten, behalve de wederzijdsche richting, respectievelijk vijf en vier richtingen worden gemeten naar bekende, in de R. D. berekende punten. Beschouwen we verder de gemeten richtingen als te zijn van gelijk gewicht, zoo worden de navolgende correctievergelijkingen verkregen.

Voor punt 1 met zes richtingen:

$$a_1 \triangle X_1 + b_1 \triangle Y_1 \qquad - \triangle O_1 + f_1 = v_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_5 \triangle X_1 + b_5 \triangle Y_1 \qquad - \triangle O_1 + f_5 = v_5$$

$$a_6 \triangle X_1 + b_6 \triangle Y_1 + c_6 \triangle X_2 + d_6 \triangle Y_2 - \triangle O_1 + f_6 = v_6$$

Voor punt 2 met vijf richtingen:

$$a_7 \triangle X_1 + b_7 \triangle Y_1 \quad + c_7 \triangle X_2 + d_7 \triangle Y_2 \quad - \triangle O_2 + f_7 = v_7$$
$$c_8 \triangle X_2 + d_8 \triangle Y_2 \quad - \triangle O_2 + f_8 = v_8$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_{11} \triangle X_2 + d_{11} \triangle Y_2 \quad - \triangle O_1 + f_{11} = v_{11}$$

Voor de eerste vijf richtingen, gemeten in het punt 1 naar reeds bekende punten, worden de correctievergelijkingen geheel op dezelfde wijze opgemaakt als voor de binnenrichtingen bij vereffening van een enkel punt. Hetzelfde geldt voor de vier laatste richtingen, gemeten in het punt 2.

Voor de 6e richting, dat is dus de richting van het onbekende punt 1 naar het onbekende punt 2, is:

$$\psi_6 = \psi_6' + \triangle \psi_6 = bg\,tg \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} = bg\,tg \frac{X_2' - X_1' + \triangle X_2 - \triangle X_1}{Y_2' - Y_1' + \triangle Y_2 - \triangle Y_1} =$$
$$= bg\,tg \frac{X_2' - X_1'}{Y_2' - Y_1'} + a_6 \triangle X_1 + b_6 \triangle Y_1 - a_6 \triangle X_2 - b_6 \triangle Y_2 + R$$

bij benadering is dus:

$$\triangle \psi_6 = a_6 \triangle X_1 + b_6 \triangle Y_1 - a_6 \triangle X_2 - b_6 \triangle Y_2.$$

De correctievergelijking, in het algemeen voorgesteld door:

$$\triangle \psi - \triangle O + f = v$$

zal dan voor de richting 1—2 luiden:

$$a_6 \triangle X_1 + b_6 \triangle Y_1 + c_6 \triangle X_2 + d_6 \triangle Y_2 - \triangle O_1 + f_6 = v_6.$$

**Correctievergelijkingen voor de wederzijdsche richting**

Hierin is:

$$c_6 = - a_6 \quad \text{en} \quad d_6 = - b_6.$$

Voor de *omgekeerde richting* 2—1 wordt gevonden:

$$\psi_7 = \psi_7' + \triangle \psi_7 = bg\,tg \frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2} = bg\,tg \frac{X_1' - X_2' + \triangle X_1 - \triangle X_2}{Y_1' - Y_2' + \triangle Y_1 - \triangle Y_2} =$$
$$= bg\,tg \frac{X_1' - X_2'}{Y_1' - Y_2'} - c_7 \triangle X_1 - d_7 \triangle Y_1 + c_7 \triangle X_2 + d_7 \triangle Y_2 + R$$

en voor de correctie vergelijking:

$$a_7 \triangle X_1 + b_7 \triangle Y_1 + c_7 \triangle X_2 + d_7 \triangle Y_2 - \triangle O_2 + f_7 = v_7$$

waarin:

$$a_7 = - c_7 \quad \text{en} \quad b_7 = - d_7.$$

Door vergelijking van de ontwikkeling van $\psi_7$ met die van $\psi_6$ ziet men tevens, dat ook $a_6 = - c_7$ en $b_6 = - d_7$. Samenvattende heeft men dus, dat de coëfficiënten van $\triangle X_1$, $\triangle Y_1$, $\triangle X_2$ en $\triangle Y_2$ in de beide correctievergelijkingen, die op de wederzijdsche richting betrekking hebben, gelijk zijn, waaruit volgt, dat $\triangle \psi_6 = \triangle \psi_7$. De grootheden $f$ in deze vergelijkingen worden evenals die voor de andere richtingen, opgemaakt als $f = \psi' - (\alpha + O')$.

Evenals bij de enkele puntsbepaling kan ook in het hier gestelde vraagstuk voor de berekening van de coëfficiënten van de gereduceerde normaalvergelijkingen uit de correctievergelijkingen de „Regel van Schreiber" worden toegepast; de beide onbekenden $\triangle O_1$ en $\triangle O_2$ vallen dan weg en er ontstaan vier normaalvergelijkingen, waarin de onbekenden $\triangle X_1$, $\triangle Y_1$, $\triangle X_2$ en $\triangle Y_2$ overblijven.

De somcontrôle wordt weder ingevoerd door in de berekening op te nemen de grootheden $s$, zijnde voor iedere correctievergelijking de som der grootheden $a$, $b$, $c$, $d$ en $f$. Analoge contrôle als bij de enkele puntsbepaling wordt ook hier gevonden, doordat $\triangle \overline{X}_1 = \triangle X_1 - 1$; $\triangle Y_1 = \triangle Y_1 - 1$; $\triangle X_2 = \triangle X_2 - 1$ en $\triangle \overline{Y}_2 = \triangle Y_2 - 1$.

**Meervoudige punts-bepaling**

Een meervoudige puntsbepaling levert in beginsel geen nieuwe gezichtspunten. Bij vereffening van drie punten tegelijk bijv. heeft men na reductie *zes* normaalvergelijkingen. Voor de berekening van de coëfficiënten dezer vergelijkingen volgt men geheel den hiervoor aangegeven weg.

**Combinatie der correctie-vergelijkingen van binnen en buiten-richtingen**

Zijn behalve de buitenrichtingen ook richtingen gemeten in de bekende punten, zoo vallen deze laatste van zelf sprekend buiten de reductie. De bijdragen van de coëfficiënten der op deze richtingen betrekking hebbende correctievergelijkingen tot de samenstelling der normaalvergelijkingen worden evenals bij de enkele puntsbepaling gevoegd bij die der gereduceerde correctievergelijkingen.

Een dubbelpuntsbepaling geeft aanleiding tot *vier* gereduceerde normaalvergelijkingen van den volgenden vorm:

$$\begin{aligned}
[aa] \triangle X_1 + [ab] \triangle Y_1 + [ac] \triangle X_2 + [ad] \triangle Y_2 + [af] &= 0 \\
[ab] \triangle X_1 + [bb] \triangle Y_1 + [bc] \triangle X_2 + [bd] \triangle Y_2 + [bf] &= 0 \\
[ac] \triangle X_1 + [bc] \triangle Y_1 + [cc] \triangle X_2 + [cd] \triangle Y_2 + [cf] &= 0 \\
[ad] \triangle X_1 + [bd] \triangle Y_1 + [cd] \triangle X_2 + [dd] \triangle Y_2 + [df] &= 0
\end{aligned}$$

Zijn de coëfficiënten $[ac]$, $[ad]$, $[bc]$ en $[bd]$ klein, dan zal eene vereffening als dubbelpunt, vergeleken met het *na elkander* vereffenen der twee punten afzonderlijk, weinig effect opleveren. Immers wanneer deze coëfficiënten *nul* zouden zijn, vallen de vier normaalvergelijkingen uiteen in *twee groepen*, ieder van twee vergelijkingen, uit welke de punten 1 en 2 ieder afzonderlijk te berekenen zijn.

**Versterking der dubbele punts-bepaling**

Het is evenwel mogelijk den samenhang der punten te versterken en wel door de meting zoo in te richten, dat de wederzijdsche richting grooter invloed krijgt. Indien in het hiervoor gestelde geval op het eene punt behalve het andere onbekende punt nog zijn waar te nemen de bekende punten $P_2$, $P_3$, $P_4$ en $P_5$, dan kunnen in dit punt worden gemeten twee series, elk van drie richtingen zoodanig, dat in iedere serie de richting naar het andere onbekende punt is opgenomen. Door het optreden van laatstbedoeld punt in beide series wordt de invloed van de wederzijdsche richting relatief grooter. [1]) Op analoge wijze kan voor het tweede onbekende punt worden gehandeld.

**Oplossing der normaalver-gelijkingen**

Voor de oplossing der normaalvergelijkingen kunnen twee methoden worden gebezigd. Voor de logarithmische berekening is de methode van Gauss aangewezen; zij is met schema en hulpbladen en een getallenvoorbeeld opgenomen in het leerboek Schols-Thijs „Landmeten en Waterpassen".

Voor de berekening met de rekenmachine wordt de methode Cholesky aanbevolen. Het daarvoor te bezigen schema wordt in formulier n°. 22 gegeven; een uitgewerkt getallenvoorbeeld wordt tevens verstrekt. Behalve de onbekenden leveren beide methoden de gewichtsgetallen $Q$, benevens de middelbare fouten in richting en coördinaten.

[1]) Als vanzelf sprekend is hier aangenomen, dat de verschillende series ook als zoodanig worden vereffend. De wederzijdsche richting treedt dan hier ook meermalen op, zoodat de bijdrage van deze richting tot de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen stijgt.

**Toekenning van gewichten aan de richtingen**

Het zal in vele gevallen aanbeveling verdienen om ook bij dubbele puntsbepaling aan de onderscheiden gemeten richtingen *gewichten* toe te kennen; de beoordeeling wat betreft die toekenning blijft bij wisselende atmosferische toestanden voor elk bijzonder geval aan den waarnemer, zooals dit bij de enkele puntsbepaling is uiteengezet.

Men houde bij de vaststelling der gewichten tevens in het oog, dat in de algemeene formule:

$$m_t^2 = m^2 + m_A^2$$

de term $m_A^2$ wegvalt voor de wederzijdsche richting, aangezien voor deze de waarde van $d$ in de betrekking $m_A = \frac{d}{l}\,\varrho$ nul is. Daar dus voor genoemde richting $m_t = m$, zal haar gewicht steeds grooter zijn dan dat voor de richtingen naar de bekende punten, omdat bij deze laatste rekening moet worden gehouden met den straal $d$ van den foutencirkel.

Nemen wij aan dat deze punten op ongelijken afstand zijn gelegen, bijv. resp. op 1½, 2, 3 en 4 km van het te bepalen punt en dat als vijfde richting is waargenomen die naar het andere onbekende punt. De waarde van $m$ stellen we weder op 5 ccg en den straal $d$ van den foutencirkel der bekende punten op 3 cm.

Veronderstellen we verder, dat de waarnemingen zijn geschied onder gunstige atmosferische omstandigheden, waarbij de beelden zich alle rustig en duidelijk in den kijker vertoonen, dan zal voor de gewichten der vijf bedoelde richtingen in verhouding tot elkander globaal worden gevonden resp. 1, 2, 3, 4 en 6. Hoe grooter de afstand tot de gegeven punten, hoe meer de gewichten van de betreffende richtingen zullen naderen tot die van de wederzijdsche richting. Wanneer de bekende punten *alle* op meer dan 6 km zijn gelegen, zal toekenning van gewichten achterwege kunnen blijven. Bij korte en ongelijke afstanden, zooals dit bij kadastrale metingen zeer vaak voorkomt, zal het invoeren van gewichten bij gunstigen atmosferischen toestand tot een bevredigender resultaat voeren en derhalve niet mogen worden nagelaten. De bedragen der gewichten worden door middel van het „nomogram voor de bepaling van het gewicht eener richting" vastgesteld.

## § 12. GRAFISCHE VEREFFENING VAN EEN PUNT

Ook langs grafischen weg kan een oplossing worden gevonden voor het vraagstuk der puntsbepaling. Met weglating zooveel mogelijk van alle theorie, waarvoor kan worden verwezen naar Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, 53e jaargang blz. 41—61, zal hieronder aan de hand van een rekenvoorbeeld een volledig overzicht worden gegeven van den gang eener zoodanige vereffening.

**Berekening van benaderde coördinaten en van de argumenten**

Op de bekende wijze worden vooraf benaderde coördinaten berekend van een langs grafischen weg te vereffenen punt. Uit deze coördinaten en die van de gegeven bekende punten, waaruit het punt zal worden bepaald, vindt men de benaderde argumenten $\psi'$. In het zoo genoemde „Hulpformulier bij de grafische vereffening van een punt" (Form. n°. 26) worden ingevuld de gemeten buiten- en binnenrichtingen, benevens de hierboven verkregen argumenten $\psi'$.

**Teekenblad**

Men teekent nu een *kaart* van de gegeven punten en van het benaderde punt $P'$ en een schaal 1 : $s$, in het voorbeeld 1 à 40.000. Daartoe zal men gebruik maken van millimeterpapier, waarop de kaarteering zeer gemakkelijk kan worden uitgevoerd. De op het millimeterpapier voorgestelde punten benevens de asrichtingen worden vervolgens doorgeprikt op een vel wit papier, het z.g. *teekenblad.*

Bij een triangulatie, waarbij een aantal punten grafisch zullen worden vereffend, verdient het aanbeveling om een kaart aan te leggen van *alle* punten, die als gegeven punten bij de verschillende puntsbepalingen zullen optreden. Men neemt dan telkens van de kaart op een teekenblad over die punten, die voor elk speciaal geval benoodigd zijn.

Op het teekenblad worden ook de *inverse* punten geconstrueerd. De constructie heeft plaats met behulp van het daarvoor bestemde nomogram, hetwelk evenals het teekenblad zelve in de bijlage is opgenomen; het geschiedt op de volgende wijze.

**Nomogram voor het construeeren van de inverse figuur**

Op het nomogram komen vier met cirkeltjes aangeduide punten voor, waarbij verschillende schalen zijn aangegeven. De eene schaal 1 à $s$ is die der kaart , de andere 1 à $\bar{s}$ die van de te construeeren *inverse figuur*; voor elk punt is het product van $s$ en $\bar{s}$ constant. Men kan dus naar behoefte nog andere schalen toevoegen; zoo kan men bij het punt met het getal 11,28, welk getal aangeeft het aantal cm van den afstand tot het gemeenschappelijk raakpunt der cirkels, nog schrijven 20.000 en 2.5. De samenhang tusschen de afstanden $c$ in cm van de omkringde punten tot het raakpunt en de schalen is:

$$c = \frac{636620}{s\bar{s}}\, 10 = \frac{10\varrho^{cc}}{ss}.$$

**Constructie van de inverse figuur**

In het voorbeeld is een der inverse punten het door $\overline{51}$ aangeduide punt. Dit is uit 51, een in de kaart geteekend punt, verkregen door het omkringde punt 5,64 van het nomogram te leggen op het punt $P'$ zoodanig, dat 51 op een der cirkels van het nomogram valt. Het tweede snijpunt van dezen cirkel met de verbindingslijn 51—$P'$ is het inverse punt $\overline{51}$. Dit punt wordt doorgeprikt op het teekenblad. Aldus worden eveneens verkregen de inverse punten $\overline{124}$, $\overline{612}$ en $\overline{78}$. De schaal 1 : $\bar{s}$ van de inverse figuur is in het voorbeeld gelijk 1 : 5 geworden, omdat het punt 5,64 is gebruikt en de schaal van de kaart 1 à 40.000 was.

**Gelijke gewichten**

Nemen we aan, dat de gemeten richtingen gelijk gewicht hebben. In ons vraagstuk zijn 4 binnenrichtingen gemeten naar de punten 612, 78, 51 en 124. Geconstrueerd wordt nu het zwaartepunt van de inverse punten $\overline{612}$, $\overline{78}$, $\overline{51}$ en $\overline{124}$. Uit het punt $\overline{124}$ wordt het punt 6 afgeleid door de lijn $\overline{124}$ — 6 gelijk en evenwijdig te maken aan de lijn $\bar{z}$ — $P'$. Op analoge wijze is 3 ontstaan uit $\overline{612}$, 4 uit $\overline{78}$ en 5 uit $\overline{51}$. Men kan deze handeling aldus formuleeren, dat de punten $\overline{612}$, $\overline{78}$, $\overline{51}$ en $\overline{124}$, de inverse punten, behoorende bij de achterwaartsche richtingen, verschoven zijn in een richting en over een afstand, gelijk aan de richting en aan den afstand, waarover $\bar{z}$ moest worden verschoven om dit punt met $P'$ te doen samenvallen.

**Grafische reductie**

Deze bewerking, n.l. het zwaartepunt zoeken van de inverse punten der binnenrichtingen en de verschuiving dezer punten, is de *grafische reductie*. Inverse punten, behoorende bij punten, waarin buitenrichtingen zijn gemeten, blijven buiten de reductie; zij worden dus *niet* verschoven.

Bij de voorwaartsche richting uit 612 behoort het niet verschoven inverse punt $\overline{612}$, nader aangeduid door het cijfer 1, correspondeerende met het volgnummer in het hulpformulier. Bij de voorwaartsche richting uit 78 behoort het inverse punt $\overline{78}$, nader aangeduid door 2. Bij de achterwaartsche richtingen behooren de verschoven inverse punten 3, 4, 5 en 6, welke evenals 2 met de volgnummers in het hulpformulier overeenstemmen.

Voor de geheele verdere bewerking zijn *alleen* deze 6 punten en het punt $P'$ van beteekenis; alle andere voor de constructie gebezigde punten hebben nu hun

belang verloren. Tot goed begrip van het verloop der grafische vereffening zijn deze punten in het voorbeeld duidelijk aangegeven; in de practijk zal men ze evenwel, ter voorkoming van verwarring, op zoo weinig mogelijk opvallende wijze in de teekening voorstellen, bijv. door middel van een flauw potloodkringetje.

In het hulpformulier worden de grootheden $f$, betrekking hebbende op de binnenrichtingen, op de bekende wijze gereduceerd door n.l. elk dier grootheden te verminderen met het gemiddelde. Het hulpformulier wordt alzoo ingevuld tot en met de door dikke lijnen begrensde kolom.

**Fouten toonende figuur**

Thans volgt de constructie van de foutentoonende figuur, welke constructie insgelijks met behulp van een nomogram wordt uitgevoerd. Dit nomogram, eveneens in de bijlage voorkomende, bestaat uit twee assen $\bar{l}$ en $d$ en een bundel orthogonale hyperbolen, op drie wijzen becijferd; dit laatste om eenige speling te hebben in de schaal 1 : $\sigma$, in welke de foutentoonende figuur zal worden geteekend. In het voorbeeld is gebruik gemaakt van de middelste becijfering, naast welke is aangegeven $\bar{s} \cdot \sigma = 10$.

Daar voor $\bar{s}$ de waarde 5 werd genomen, wordt dus door het bezigen van de middelste becijfering $\sigma = 2$. Wanneer de becijfering $\bar{s} \cdot \sigma = 5$ gebruikt was, zoo zou $\sigma = 1$ geworden zijn. Ook hier kan men naar believen andere becijferingen aanbrengen.

Bij een positieve $f$ gebruikt men het nomogram met de z.g. goede-, de voorkant, bij een negatieve met de verkeerde-, achterkant naar boven gekeerd. De buitenrichting 1 heeft een positieve $f$ van 58; met de goede kant naar boven legt men het nomogram op het teekenblad met het snijpunt der assen $\bar{l}$ en $d$ in $P'$ en verder zoodanig, dat het punt 1 valt op de $\bar{l}$-as. In punt 1 richt men, geholpen door het op het nomogram aangebrachte vierkanten-net, op de $\bar{l}$-as een loodlijn op en bepaalt op deze loodlijn het punt, waar deze gesneden wordt door de hyperbool met cijfer 58. Dit punt prikt men door op het teekenblad en geeft het aan door een cirkeltje.

Aldus handelt men voor alle zes richtingen, waarbij het, dank zij de reeds uitgevoerde grafische reductie, niet noodig is achterwaartsche en voorwaartsche richtingen afzonderlijk te behandelen. Voor de richting 5 moet het nomogram met de verkeerde zijde gebezigd worden, daar $f = -16$.

Door de uitgezette punten, alle in de figuur door cirkeltjes aangegeven, worden de rechten van de foutentoonende figuur getrokken, welke in het teekenblad zijn aangegeven door middel van de tusschen haakjes geplaatste cijfers 1 tot en met 6. Deze rechten loopen evenwijdig met de verbindingslijnen van het punt $P'$ resp. met de punten 1, 2 ...... 6. De rechte (1) is dus evenwijdig met $P'$ 1, de rechte (2) met $P'$ 2 enz.

De constructie van de foutentoonende figuur is hiermede voltooid en in deze figuur zal thans tot de keuze van het definitieve punt P moeten worden overgegaan.

**Bepaling van het definitieve punt**

Volgens een door Dr. W. C. van der Sterr voor voorwaartsche richtingen aangegeven methode, kan dit geschieden door gebruik te maken van twee stel evenwijdige *hulplijnen*. In het voorbeeld zijn daarvoor genomen de lijnen *I*, 1 en *I*, 2, terwijl tevens door $P'$ de met deze evenwijdige lijn *I*,0 is getrokken. De ligging en richting dezer lijnen is geheel willekeurig; uit practische overwegingen zal men deze evenwel zoo trekken, dat de snijpunten met de samenstellende rechten van de foutentoonende figuur op het teekenblad vallen, aangezien van deze snijpunten

een verder gebruik zal moeten worden gemaakt. Ieder der lijnen levert met de zes rechten van de foutenkromme een snijpunt op. Van willekeurige op deze lijnen aangenomen nulpunten meet men de afstanden tot deze snijpunten.

Voor de lijn *I*, 1 is het snijpunt van (2) en (3) als nulpunt genomen en voor *I*, 2 het snijpunt met (3). Dat de lijn *I*, 1 door het snijpunt der lijnen (2) en (3) en dat der lijnen (5) en (6) gaat, is niet van essentieele beteekenis. Dit is alleen geschied, omdat men nu slechts 4, inplaats van 6 afstanden heeft uit te meten. Evenmin is het van belang, dat *I*, 2 door het snijpunt der lijnen (4) en (5) gaat. Om al te groote getallen te vermijden is het practisch om de afstanden tot de nulpunten in den dm. als eenheid uit te drukken. Op de schaal van de foutentoonende figuur behoeft niet te worden gelet, indien men ook het resultaat van de hiernavolgende bewerking in dezelfde eenheid uitdrukt.

De zoo verkregen getallen worden verzameld in de kolommen $\xi$ *I*, 1 en $\xi$ *I*, 2 in het hulpformulier. In de kolom $a_I$ worden de loodrechte afstanden van de punten 1, 2 .. 6 tot de lijn *I*,0 vermeld. Hierbij moet *wel* op de schaal 1 : $\bar{J}$ van de inverse figuur worden gelet; deze was in het voorbeeld 1 : 5. Omdat verder bij de vaststelling dezer schaal gerekend is met den cm als eenheid in de inverse figuur, is in het voorbeeld het aantal cm der loodlijn, vermenigvuldigd met 5 het bedrag, hetwelk moet worden genoteerd.

Aangezien de grootheden $a_I$ toch in het kwadraat worden verheven, is het niet noodig op het teeken te letten. Bij de achterwaartsche richtingen levert het niettemin eenig voordeel op om de positieve en negatieve loodlijnen te onderscheiden. Men kan dan een contrôle verkrijgen, omdat de som der uitgepaste grootheden *a* der binnenrichtingen *nul* moet zijn.

In het formulier worden nu berekend $a_I\ a_I$, $a_I\ a_I\ \xi_{I,1}$ en $a_I\ a_I\ \xi_{I,2}$. De kolommen worden opgeteld, waarna men berekent:

$$\Xi_{I,1} = \frac{[a_I\ a_I\ \xi_{I,1}]}{[a_I\ a_I]}$$

$$\text{en:} \quad \Xi_{I,2} = \frac{[a_I\ a_I\ \xi_{I,2}]}{[a_I\ a_I]}.$$

Uitgaande van de aangenomen nulpunten, resp. op de lijnen *I*, 1 en *I*, 2 worden deze afstanden in de zelfde schaal, die bij de uitpassing is gebezigd, uitgezet.

*Op de verbindingslijn dezer punten ligt het definitieve punt P*, in de figuur de lijn *II*, 1.

Om het definitieve punt te bepalen heeft men dus slechts de bovenomschreven constructie te herhalen, met twee nieuwe, eveneens willekeurige hulplijnen.

In het voorbeeld is een bekorting toegepast; als nieuwe hulplijn is n.l. gekozen de lijn *II*, 1, die bij de eerste constructie als meetkundige plaats van het definitieve punt *P* werd gevonden. Indien, zooals in het voorbeeld, deze lijn snijpunten met de samenstellende rechten geeft, die behoorlijk op het teekenblad vallen, hetgeen in het algemeen een toeval is, zoo kan men met deze eene hulplijn volstaan, omdat het definitieve punt toch op deze lijn moet liggen.

De lijn *II*, 0 is door *P'* evenwijdig getrokken aan *II*, 1. De getallen in de kolom $a_{II}$ van het hulpformulier zijn de loodrechte afstanden van de punten 1, 2 ...... 6 tot de lijn *II*, 0 en die in de kolom $\xi_{II,1}$ de afstanden van het snijpunt van (1) met *II*, 1 (het nulpunt), tot de snijpunten der andere samenstellende rechten met *II*, 1.

De verdere bewerking dezer getallen, die overeenkomt met de vroeger beschrevene, levert het definitieve punt *P*.

Men kan nu de grootheden $v$ uitmeten. Daarvoor dient weer het tweede nomogram, hetwelk nu evenwel eenigszins anders wordt gebruikt. Om bijv. de $v$ van de richting (1) uit te meten, legt men het nomogram zoo, dat $P'$ komt te liggen op de as $d$ of haar verlengde, $P$ op de as $\bar{l}$ of haar verlengde en de lijn (1) evenwijdig met de as $\bar{l}$. Dit laatste is op het oog voldoende nauwkeurig te constateeren met behulp van het kwadratennet. Bij het cirkeltje op de lijn (1) voorkomende, leest men nu op de zelfde becijfering, die bij het construeeren der foutentoonende figuur werd gebezigd, het nummer van de hyperbool af. Dit bedrag, in het voorbeeld + 29, is de $v$ van de richting (1). Moet men om den gewenschten stand van het nomogram ten opzichte van het teekenblad te verkrijgen, dit nomogram met de verkeerde kant naar boven leggen, dan is $v$ negatief.

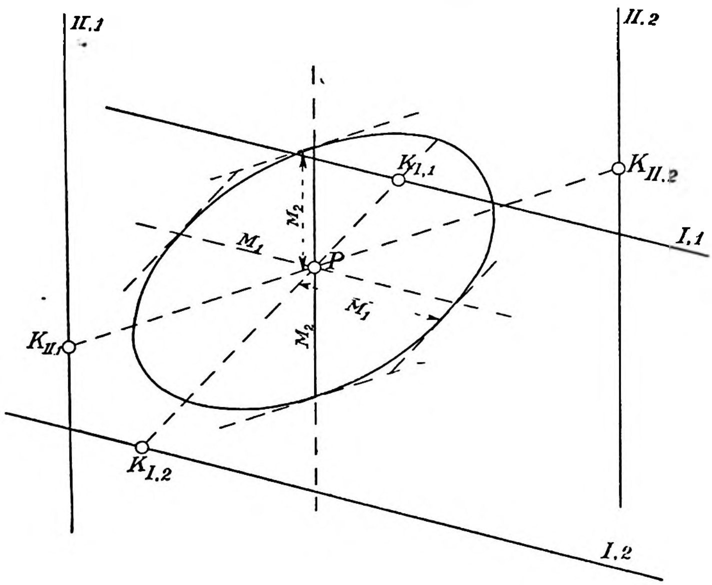
**Bepaling van de grootheden $v$ en de middelbare fouten**

De uitgemeten grootheden $v$ worden in de kolom $v\sqrt{g}$ ingevuld, waarna [$gvv$], in het behandelde geval [$vv$] wordt berekend, waaruit dan na deeling door het aantal overtollige waarnemingen $\mu$, resp. $m$ wordt berekend. Daarna berekent men:

$$M_I^2 = \frac{\mu^2}{[a_I \; a_I]} \quad \text{en} \quad M_{II}^2 = \frac{\mu^2}{[a_{II} \; a_{II}]} \text{ en daaruit:}$$

$M_I$ en $M_{II}$, welke grootheden dienen voor de constructie van de foutenellips.

*Constructie van de foutenellips*




**Foutenellips**

In de figuur zijn $I$, 1 en $I$, 2 een stel evenwijdige hulplijnen. De vroeger uiteengezette constructie heeft op deze lijnen de punten $K_{I,1}$ en $K_{I,2}$ opgeleverd, op welker verbindingslijn het definitieve punt $P$ is gelegen. De theorie leert, dat ten opzichte van de foutenellips de richting van de lijn $K_{I,1}$ — $K_{I,2}$ toegevoegd is met die van de lijnen $I$, 1 en $I$, 2. Door $P$ wordt een lijn, evenwijdig met $I$, 1 en $I$, 2 getrokken

en op deze lijn wordt ter weerszijden van $P$ een afstand gelijk aan $M_I$ uitgezet, waarmede twee punten van de foutenellips zijn verkregen. De raaklijnen in deze punten zijn eveneens bekend, aangezien zij evenwijdig zijn met de verbindingslijn van $K_{I,1}$ en $K_{I,2}$.

Ligt het tweede stel evenwijdige hulprechten geheel willekeurig, zooals in de figuur in tegenstelling met het voorbeeld is ondersteld, dan levert dit tweede stel, onder gebruikmaking van $M_{II}$ eveneens een tweetal punten van de foutenellips, met de door deze punten aan de ellips getrokken raaklijnen.

Deze twee stellen hulprechten leveren in den regel voldoende gegevens om de foutenellips met genoegzame nauwkeurigheid in de teekening weer te geven. De bijzondere keuze van de richting van het tweede stel, n.l. in een richting, toegevoegd met die van het eerste stel, zooals in het voorbeeld, geeft eenige vereenvoudiging bij de constructie van de foutenellips.

Hiermede kan de grafische vereffening als geëindigd worden beschouwd. In het hulpformulier worden ten slotte nog de grootheden $\triangle x$ en $\triangle y$ vermeld, verkregen door uitpassing van het teekenblad, benevens de definitieve coördinaten van het punt $P$. Het teekenen van de voetpuntskromme is onnoodig; de ellips geeft een voldoenden indruk van de nauwkeurigheid van de puntsbepaling.

**Ongelijke gewichten**

In het voorgaande betoog is uitgegaan van de onderstelling dat de richtingen van gelijk gewicht zijn. Wanneer de gewichten ongelijk zijn, moet de bewerking eenigszins worden gewijzigd; de wijziging houdt in een andere behandeling van de inverse figuur. Nadat met behulp van het eerste nomogram de inverse punten zijn geconstrueerd, moet het zwaartepunt van de inverse punten der binnenrichtingen worden bepaald, evenwel thans met de onderstelling, dat in deze punten *massa's* zijn gelegen, *evenredig met de gewichten*.

De constructie van het zwaartepunt kan ook nu op eenvoudige wijze geschieden; men kiest daartoe op de verbindingslijn van 2 punten een punt, waarvan de afstanden tot de beide gegeven punten zich verhouden, omgekeerd aan de beide gewichten. Dit punt heeft dus een gewicht, gelijk aan de som der oorspronkelijke gewichten. Op deze wijze verkleint men geleidelijk het aantal der punten, totdat men eindelijk een punt, het zwaartepunt verkrijgt.

Evenals bij het geval van gelijke gewichten is beschreven, worden nu de inverse punten der achterwaartsche punten verschoven over den afstand en in de richting: zwaartepunt — $P'$. Hierna worden de verschoven punten met $P'$ verbonden en op de verbindingslijn een punt genomen, van welk punt de afstand tot $P'$ gelijk is aan die van het verschoven punt tot $P'$, vermenigvuldigd met $\sqrt{g}$. Aan deze transformatie worden ook de inverse, niet verschoven punten onderworpen, die bij de buitenrichtingen behooren.

De transformatie heeft ten doel de complicatie, teweeg gebracht door de ongelijke gewichten, te doen verdwijnen; de laatst verkregen punten worden genummerd met de volgnummers in het hulpformulier, waarna het vraagstuk, op de wijze van gelijke gewichten, verder kan worden behandeld. De gewichten worden dus in de inverse figuur verwerkt.

In het hulpformulier worden de grootheden $f$ ook aan een bewerking onderworpen, welke eveneens beoogt het vraagstuk te herleiden tot het geval van gelijke gewichten. Deze bewerking is tweeledig en bestaat uit:

1°. de reductie van de binnenrichtingen, voor welke worden berekend de waarden $gf$ en daarna de grootheden $f - \frac{[gf]}{[g]}$;

2°. de herleiding tot gelijke gewichten. Daartoe worden voor de buitenrichtingen berekend de grootheden $f\sqrt{g}$ en voor de binnenrichtingen $\left(f - \frac{[gf]}{[g]}\right)\sqrt{g}$, welke grootheden nu gebruikt worden voor de constructie van de foutentoonende figuur in combinatie met de getransformeerde punten der inverse figuur.

De constructie van het definitieve punt ondergaat geenerlei verandering. Is dit punt verkregen, dan worden op de wijze, beschreven bij het geval van gelijk gewicht, voor de grootheden $v$, analoge grootheden uitgemeten, die thans $v\sqrt{g}$ zijn.

Na de berekening van $\mu^2$ en $M_I$ en $M_{II}$, verloopt de constructie van de foutenellips geheel op de zelfde wijze, als dit voor gelijke gewichten werd beschreven.

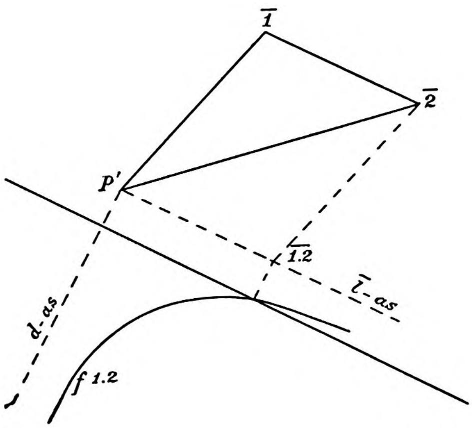
**Bepaling van een punt uit meer series van metingen**

Hoe gehandeld moet worden, indien ter bepaling van een punt meer series zijn gemeten en dus meer oriënteerings-onbekenden moeten worden ingevoerd, is duidelijk. De inverse punten, die tot één serie richtingen behooren, ondergaan een gelijke verschuiving, afgeleid uit de ligging van hun zwaartepunt. De inverse punten, van een tweede serie, ondergaan een verschuiving, die door het daarbij behoorende zwaartepunt wordt bepaald en zoo vervolgens. Inplaats dus van een enkele, zooals vroeger, moeten er thans meer reducties worden uitgevoerd.

Na de reductie hebben de binnenrichtingen het karakter van buitenrichtingen verkregen en is daardoor het vraagstuk meer tot het normale geval teruggebracht.

Het geval, dat er uitsluitend hoeken zijn gemeten, is te beschouwen als het grensgeval van het meten van de richtingen in meer series; het behoeft niet afzonderlijk te worden beschouwd. Er is echter voor het geval van hoekmeting een iets eenvoudiger behandeling mogelijk.

**Hoekmeting**




Nemen we aan dat $\bar{1}$ en $\bar{2}$ de inverse punten zijn van de punten, die met $P'$ de beenen van den gemeten hoek bepalen. Men kan nu, indien uitsluitend hoeken zijn gemeten, inplaats van richtingen, hoeken vereffenen. In dit geval moeten de samenstellende rechten van de foutentoonende figuur geconstrueerd worden evenwijdig aan $P' - \overline{1.2}$, waarbij het punt $\overline{1,2}$, het 4e hoekpunt van het parallelogram $P'$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\overline{1.2}$ het inverse punt is.

Het nomogram wordt met de $\bar{l}$-as langs $P' - \overline{1.2}$ gelegd en in dit laatste punt wordt de loodlijn opgericht ter bepaling van het snijpunt met de hyperbolen.

De groote waarde van de grafische methode is gelegen in hare aanschouwelijkheid; zij heeft daardoor groote instructieve hoedanigheden. Uit de sterker dan bij de rekenmethode naar voren tredende goede en slechte zijden van een bepaald geval kunnen lessen en conclusies voor de toekomst worden getrokken. Van direct practische beteekenis is, dat de grafische methode de mogelijkheid biedt voor eene keuze op het oog van het definitieve punt in de foutentoonende figuur. Reeds na enkele gevallen, welke streng behandeld zijn, kan men zich het voldoende inzicht

eigen maken, om hiertoe over te gaan. De *constructie* van het definitieve punt, zoowel als die van de foutenellips, kan dan achterwege blijven, waardoor een groote arbeidsbesparing wordt verkregen.

Men kan toch in het algemeen wel aannemen, dat een enkele cm onnauwkeurigheid in de ligging van het te bepalen punt van geen beteekenis is. De hierdoor toegelaten speling mag daarom zonder bezwaar worden aangewend voor het toelaten van een bepaling van het definitieve punt door schatting.

Het is duidelijk, dat men bij die schatting ook eenigszins rekening mag houden met de grootere waarde van sommige richtingen, indien men deze beter heeft kunnen waarnemen dan andere. In gevallen, waar men twijfelt aan de nauwkeurigheid van het resultaat, zal men de foutenellips construeeren.

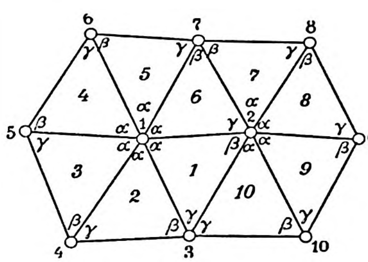
Tenslotte moge er nog op worden gewezen, dat het op het oog bepalen van het definitieve punt alleen door ervaren personen behoort te geschieden en niet aan ondergeschikt personeel kan worden overgelaten.

## § 13. VEREFFENING EN BEREKENING VAN EEN DRIEHOEKSNET

Aan de aansluiting van een aaneengesloten net van driehoeken aan reeds in de R. D. bepaalde punten gaat de vereffening van dit net vooraf. Deze vereffening heeft plaats volgens de *cotangentenmethode*-Tienstra, welke methode voor het in de figuur aangegeven net hieronder zal worden toegelicht.

**Cotangenten-methode-Tienstra**

Dit driehoeksnet bevat 10 driehoeken, waarin alle hoeken, in totaal $10 \times 3 = 30$ zijn bepaald; de gewichten, waarmede deze hoeken zijn gemeten, zijn evenredig genomen met hunne cotangenten, zoodat in een driehoek $i$ met hoeken $\alpha_i$, $\beta_i$ en $\gamma_i$ de gewichten zijn: $\cot \alpha_i$, $\cot \beta_i$ en $\cot \gamma_i$.




Het driehoeksnet moet voldoen aan de volgende voorwaarden:

**Voorwaarden**

*a.* in elk der driehoeken moet de som der hoeken $200^g$ zijn (driehoeksvoorwaarde);

*b.* in de centrale punten 1 en 2 moet de som der in deze punten gemeten hoeken $400^g$ zijn (horizontvoorwaarde);

*c.* voor ieder der centrale punten moet het product der sinussen van de rechts gelegen omtrekshoeken gelijk zijn aan het product der sinussen van de links gelegen omtrekshoeken (sinusvoorwaarde).

Het hier gestelde vraagstuk zal dus moeten voldoen aan 14 voorwaarden n.l. 10 driehoeks-, 2 horizont- en 2 sinusvoorwaarden. Noemen wij de correcties, aan te brengen aan de hoeken $\alpha_1$, $\beta_1$ en $\gamma_1$ resp. $v_{\alpha_1}$, $v_{\beta_1}$ en $v_{\gamma_1}$, die aan de hoeken $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ resp. $v_{\alpha_2}$, $v_{\beta_2}$, $v_{\gamma_2}$ enz., dan verkrijgen we als 1e voorwaardevergelijking:

$$v_{\alpha_1} + v_{\beta_1} + v_{\gamma_1} = 200^g - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1).$$

Duiden wij de verschillen $200^g - (\alpha + \beta + \gamma)$ aan door $w_d$, dan verkrijgen we als *driehoeksvoorwaarden*:

$$\begin{array}{c} v_{\alpha_1} + v_{\beta_1} + v_{\gamma_1} = w_{d_1} \\ v_{\alpha_2} + v_{\beta_2} + v_{\gamma_2} = w_{d_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{\alpha_{10}} + v_{\beta_{10}} + v_{\gamma_{10}} = w_{d_{10}} \end{array} \qquad (1)$$

en als *horizontvoorwaarden*:

$$v_{\alpha_1} + v_{\alpha_2} + v_{\alpha_3} + v_{\alpha_4} + v_{\alpha_5} + v_{\alpha_6} = w_{h_1} \qquad (2)$$

$$v_{\beta_1} + v_{\gamma_6} + v_{\alpha_7} + v_{\alpha_8} + v_{\alpha_9} + v_{\alpha_{10}} = w_{h_2}$$

waarin:

$w_{h_1} = 400^g - (\alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_6)$ en $w_{h_2} = 400^g - (\beta_1 + \gamma_6 + \alpha_7 + \ldots\ldots + \alpha_{10})$.

Wat betreft de sinusvoorwaarden zal men bij logarithmische berekening, in plaats van de sinussen zelve, de logsin bezigen en zal de voorwaarde, in woorden gebracht, luiden, dat de som der logsin van de rechtsgelegen omtrekshoeken, verminderd met de som der logsin van de links gelegen omtrekshoeken nul moet zijn, derhalve:

$$\Sigma \text{ logsin } R - \Sigma \text{ logsin } L = 0.$$

De correctie, die in het algemeen de logsinus van een hoek ondergaat, is gelijk aan de correctie van den hoek zelve, vermenigvuldigd met den cotangens van den hoek.

Het bedrag van de sluitfout der sinusvoorwaarden kan omgerekend worden in sekunden door vermenigvuldiging met den factor $\varrho\, M$, waarin $\varrho = 636620$ centesimale sekunden en $M$ de modulus voorstelt van het Nat. logarithmenstelsel, die gelijk is aan 2.30259.

De sinusvoorwaarde voor het centrale punt 1 zal dus als volgt kunnen worden uitgedrukt:

$$\text{logsin } \gamma_1 + v_{\gamma_1} \cot \gamma_1 - \text{logsin } \beta_1 - v_{\beta_1} \cot \beta_1 + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{ logsin } \gamma_6 + v_{\gamma_6} \cot \gamma_6 - \text{logsin } \beta_6 - v_{\beta_6} \cot \beta_6 = 0$$

Duiden we in deze betrekking het negatieve verschil ($\Sigma \log \sin R - \Sigma \log \sin L$) $\times\ \varrho\, M$ aan door $w_{s_1}$, zoo wordt dan tenslotte voor de *sinusvoorwaarden* gevonden:

$$v_{\gamma_1} \cot \gamma_1 - v_{\beta_1} \cot \beta_1 + v_{\gamma_2} \cot \gamma_2 - v_{\beta_2} \cot \beta_2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + v_{\gamma_6} \cot \gamma_6 - v_{\beta_6} \cot \beta_6 = w_{s_1}$$

en (3)

$$v_{\alpha_1} \cot \alpha_1 - v_{\gamma_1} \cot \gamma_1 + v_{\beta_6} \cot \beta_6 - v_{\alpha_6} \cot \alpha_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ v_{\gamma_7} \cot \gamma_7 - v_{\beta_7} \cot \beta_7 + \ldots\ldots\ldots + v_{\gamma_{10}} \cot \gamma_{10} - v_{\beta_{10}} \cot \beta_{10} = w_{s_2}$$

waarin $w_{s_1}$ en $w_{s_2}$ zijn uitgedrukt in ccg.

Uit deze drie groepen van voorwaardenvergelijkingen zou men dus op de gebruikelijke wijze de correlatenvergelijkingen kunnen opmaken en uit deze de *veertien* normaalvergelijkingen, waaruit de correlaten kunnen worden berekend.

**Transformatie der voorwaarden**

Het is evenwel mogelijk deze bewerkelijke oplossing van het vraagstuk te ontgaan door het aanwenden van een rekenmethode, die het probleem op veel eenvoudiger wijze tot oplossing brengt. Dit geschiedt door een lineaire transformatie van de voorwaarden, waardoor een ander stel horizontvergelijkingen kan worden opgesteld, zonder dat aan de onafhankelijkheid der voorwaarden te kort wordt gedaan.

Men vermindert daartoe de eerste horizontvergelijking, betrekking hebbende op het centrale punt 1 met de driehoeksvergelijkingen, betrekking hebbende op de driehoeken 1 tot en met 6, na deze respectievelijk te hebben vermenigvuldigd met:

$$\cot \beta_1 \cot \gamma_1;\ \cot \beta_2 \cot \gamma_2;\ \ldots\ldots\ldots \cot \beta_6 \cot \gamma_6.$$

Rekening houdende met de betrekking:

$$\cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha + \cot \alpha \cot \beta = 1$$

komen we dan voor de horizontvoorwaarde voor het centrale punt 1 tot de volgende nieuwe betrekking:

$$\cot \alpha_1 (\cot \beta_1 + \cot \gamma_1)\, v_{\alpha_1} - \cot \beta_1 \cot \gamma_1\, v_{\beta_1} - \cot \beta_1 \cot \gamma_1\, v_{\gamma_1} +$$
$$\cot \alpha_2 (\cot \beta_2 + \cot \gamma_2)\, v_{\alpha_2} - \cot \beta_2 \cot \gamma_2\, v_{\beta_2} - \cot \beta_2 \cot \gamma_2\, v_{\gamma_2} +$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cot \alpha_6 (\cot \beta_6 + \cot \gamma_6)\, v_{\alpha_6} - \cot \beta_6 \cot \gamma_6\, v_{\beta_6} - \cot \beta_6 \cot \gamma_6\, v_{\gamma_6} =$$
$$w_{h_1} - \cot \beta_1 \cot \gamma_1\, w_{d_1} - \cot \beta_2 \cot \gamma_2\, w_{d_2} - \ldots\ldots\ldots - \cot \beta_6 \cot \gamma_6\, w_{d_6} = w'_{h_1} \quad (5)$$

De horizontvergelijking voor het centrale punt 2 ondergaat dezelfde behandeling.

**Samenstelling der normaalvergelijkingen**

Voor de samenstelling der normaalvergelijkingen beschikken we dus thans over tien betrekkingen van den vorm (1), twee van den vorm (5) en twee van den vorm (3). Noemen we de correlaten voor de tien driehoeksvergelijkingen resp. $D_1$ tot en met $D_{10}$, die voor de horizontvergelijkingen $H_1$ en $H_2$ en die voor de sinusvergelijkingen $S_1$ en $S_2$, zoo komen tenslotte de volgende normaalvergelijkingen tot stand:

$$(\text{tg}\, \alpha_1 + \text{tg}\, \beta_1 + \text{tg}\, \gamma_1)\, D_1 = w_{d_1}$$
$$(\text{tg}\, \alpha_2 + \text{tg}\, \beta_2 + \text{tg}\, \gamma_2)\, D_2 = w_{d_2} \quad (6)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\text{tg}\, \alpha_{10} + \text{tg}\, \beta_{10} + \text{tg}\, \gamma_{10})\, D_{10} = w_{d_{10}}$$

$$p_{1.1}\, H_1 + p_{1.2}\, H_2 = w'_{h_1} \quad (7)$$
$$p_{1.2}\, H_1 + p_{2.2}\, H_2 = w'_{h_2}$$

en:

$$p_{1.1}\, S_1 + p_{1.2}\, S_2 = w_{s_1} \quad (8)$$
$$p_{1.2}\, S_1 + p_{2.2}\, S_2 = w_{s_2}.$$

Zoowel in de normaalvergelijkingen (7) als in (8) zijn de coëfficiënten $p_{1.1}$ en $p_{2.2}$ resp.:

$$p_{1.1} = (\cot \beta_1 + \cot \gamma_1) + (\cot \beta_2 + \cot \gamma_2) + \ldots\ldots\ldots + (\cot \beta_6 + \cot \gamma_6)$$
$$p_{2.2} = (\cot \gamma_1 + \cot \alpha_1) + (\cot \alpha_6 + \cot \beta_6) + \ldots\ldots\ldots + (\cot \beta_{10} + \cot \gamma_{10})$$

terwijl:

$$p_{1.2} = -\cot \gamma_1 - \cot \beta_6.$$

Zijn in een driehoeksnet met meer centrale punten twee dezer zoo gelegen, dat zij niet verbonden zijn door een zijde van het driehoeksnet, dan is de op deze punten betrekking hebbende coëfficient $p_{1.2}$ gelijk aan nul.

**Bijzondere eigenschap der normaalvergelijkingen**

Zooals blijkt uit de betrekkingen (6), (7) en (8) vertoonen de normaalvergelijkingen deze zeer bijzondere eigenschap, dat zij uit elkaar vallen in 12 gescheiden groepen. Ieder der 10 vergelijkingen (6) levert n.l. onmiddellijk den daarbij behoorenden correlaat $D$; uit het stel (7) worden de correlaten $H_1$ en $H_2$, uit (8) de correlaten $S_1$ en $S_2$ gevonden. Bovendien hebben de correlaten $H$ en $S$ dezelfde coëfficienten, zoodat zij tegelijkertijd kunnen worden opgelost.

In het hiervoren behandelde vraagstuk zijn, zooals voorop werd gesteld, de gewichten der gemeten hoeken ongelijk. Bij eenvoudige metingen zal men evenwel geen gewichten invoeren, zoodat aan de voor de oplossing van het vraagstuk gestelde voorwaarde niet meer voldaan wordt. Past men niettemin de hier behandelde vereffening toe, dan zal zij moeten worden beschouwd als eene voor minder nauwkeurig uitgevoerde metingen aan te wenden benaderingsmethode. Het doet er dan niet toe, of in het driehoeksnet stompe hoeken voorkomen, van welke de cotangens negatief is. Indien gewenscht kan men de benadering opvoeren, strenger

maken, door sterk afwijkende hoeken bijv. zeer scherpe, meermalen te meten.

Zonder gewichten toe te kennen wordt dan de methode gezuiverd van excessen, die een nadeelig werkenden invloed zouden kunnen uitoefenen op het verkrijgen van een goed resultaat.

**Toepassing der cotangenten-methode in de practijk**

De benaderde vereffening van een driehoeksnet, waarvan de hoeken alle met hetzelfde gewicht zijn bepaald, wordt in de practijk als volgt uitgevoerd.

De driehoeksvergelijkingen worden een voor een afzonderlijk behandeld; de in iederen driehoek optredende sluitfout $w_d$ wordt over de drie hoeken verdeeld volgens den regel:

$$v_\alpha : v_\beta : v_\gamma = \cot\beta \cot\gamma : \cot\alpha \cot\gamma : \cot\alpha \cot\beta.$$

De cotangenten worden met voldoende nauwkeurigheid opgezocht in een tafel met vier decimalen. De verdeeling is met behulp van de rekenmachine of met een rekenliniaal gemakkelijk tot stand te brengen.

Men telt daarna voor elk der centrale punten de éénmaal verbeterde hoeken rondom die punten op en vindt hieruit de sluitfouten op de horizontvoorwaarde.

Vervolgens bepaalt men voor de centrale punten de som logsin der rechtsgelegen omtrekshoeken, verminderd met de som logsin der linksgelegen omtrekshoeken. De daarbij verkregen verschillen worden in centesimale sekunden omgerekend, zooals hiervoor is aangegeven.

Voor elk centraal punt wordt verder de som genomen der cotangenten van alle omtrekshoeken, waardoor de waarde wordt gevonden van de coëfficiënten $p_{1,1}$ en $p_{2,2}$, geldende deze zoowel voor de horizont- als voor de sinusvergelijkingen. De in deze normaalvergelijkingen voorkomende coëfficiënt $p_{1,2}$ verkrijgt men als de *negatieve* som van de cotangenten der twee hoeken van het driehoeksnet, staande ter weerszijden van de verbindingslijn der twee centrale punten, in de figuur $-\cot\gamma_1 - \cot\beta_6$. Met deze gegevens kunnen de normaalvergelijkingen worden opgemaakt, zoowel voor de horizont- als voor de sinusvergelijkingen, waaruit de correlaten $H_1$ en $H_2$ en de correlaten $S_1$ en $S_2$ kunnen worden gevonden.

Daarna worden de correcties aangebracht; voor het centrale punt 1 op de volgende wijze:

In driehoek 1 verkrijgt hoek $\alpha_1$ de correctie:

$(\cot\beta_1 + \cot\gamma_1)\, H_1$; de hoek $\beta_1$ krijgt de correctie $-\cot\gamma_1\, H_1$;

de hoek $\gamma_1$ de correctie $-\cot\beta_1\, H_1$. Op dezelfde wijze wordt gehandeld met de driehoeken 2—6.

Voor het centrale punt 2 heeft de verdeeling geheel analoog plaats.

Vervolgens verkrijgen alle linkeromtrekshoeken, behoorende bij het centrale punt 1 een gelijke correctie $+ S_1$ en alle rechteromtrekshoeken een correctie $- S_1$ Evenzoo wordt gehandeld voor het centrale punt 2.

In het in de bijlage verstrekte getallenvoorbeeld is de vereffening van een driehoeksnet met twee centrale punten geheel op de vooromschreven wijze uitgevoerd. De laatste kolommen van den berekeningsstaat bevatten enkele contrôles, teneinde eventueele vergissingen in de berekening te voorkomen.

Het is duidelijk, dat ook bij een driehoeksnet, hetwelk drie of meer centrale punten bevat, op dezelfde wijze kan worden gehandeld. Het eenige verschil is gelegen in het aantal normaalvergelijkingen, waarvan twee stellen aanwezig zijn, resp. voor de berekening van de correlaten $H$ en van de correlaten $S$. Het aantal

normaalvergelijkingen van ieder stel is gelijk aan dat der centrale punten. Zij worden opgemaakt volgens het volgende schema:

HORIZONT-VERGELIJKINGEN

$$\begin{array}{l} p_{1,1}\, H_1 + p_{1,2}\, H_2 + p_{1,3}\, H_3 + p_{1,4}\, H_4 + \ldots\ldots\ldots \\ p_{1,2}\, H_1 + p_{2,2}\, H_2 + p_{2,3}\, H_3 + p_{2,4}\, H_4 + \ldots\ldots\ldots \\ p_{1,3}\, H_1 + p_{2,3}\, H_2 + p_{3,3}\, H_3 + p_{3,4}\, H_4 + \ldots\ldots\ldots \\ p_{1,4}\, H_1 + p_{2,4}\, H_2 + p_{3,4}\, H_3 + p_{4,4}\, H_4 + \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Dezelfde betrekkingen gelden voor de *sinusvergelijkingen*; de correlaten $S_1 \ldots\ldots S_4$ treden dan in de plaats van de correlaten $H_1 \ldots\ldots\ldots H_4$.

BEREKENING DER COÖRDINATEN

Nadat het driehoeksnet volgens de cotangenten-methode is vereffend, worden de coördinaten der onderscheiden driehoekspunten berekend. Hieraan gaat vooraf de berekening van de driehoekszijden. Uitgaande van een der driehoekszijden *a* geschiedt deze berekening door middel van den sinusregel onder gebruikmaking van de betrekking:

**Berekening der driehoekszijden**

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C = m.$$

Hierin zijn $A$, $B$ en $C$ de hoeken, $a$, $b$ en $c$ de overstaande zijden in den driehoek $ABC$; $m$ is de middellijn van den omgeschreven cirkel. Zijn de zijden $b$ en $c$ uit bovenstaande betrekking berekend, dan is tevens in twee aangrenzende driehoeken een der zijden gevonden, waarna ook in deze driehoeken de twee andere zijden kunnen worden berekend; zoo doorgaande worden tenslotte alle zijden bekend.

Is het de bedoeling het driehoeksnet als geheel op zich zelf staande te benutten, dan moet een der zijden, *de basis*, vooraf nauwkeurig worden vastgesteld en zal men tevens moeten kennen het argument van een of meer der driehoekszijden, zoodat het net kan worden geöriënteerd. Men zal dan op de wijze van de veelhoeksberekening in het daarvoor bestemde formulier N°. 24 de coördinaten der driehoekspunten berekenen uit de nu bekende argumenten en afstanden, waarbij men ten behoeve der contrôle nu en dan zorgt terug te keeren naar een reeds berekend punt.

**Coördinatenberekening volgens de veelhoeksmethode**

Indien het net moet worden aangesloten aan twee of meer bekende punten der R.D., kan voor een der driehoekszijden een willekeurige lengte worden aangenomen en is ook de bepaling van een argument niet noodig; de berekening heeft dan plaats in een willekeurig geöriënteerd assenstelsel. Niettemin verdient het aanbeveling reeds onmiddellijk uit te gaan van eene niet te veel in lengte afwijkende basis en tevens van een zoo goed mogelijk benaderd argument, waardoor de bij de aansluiting aan te brengen correcties aan lengten en argumenten gering worden.

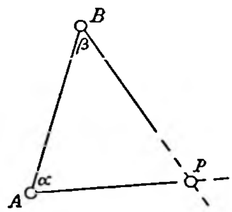
In dit geval kan ook, zooals verder zal blijken, een aansluiting langs grafischen weg tot stand worden gebracht, hetgeen een groote vereenvoudiging en tijdsbesparing oplevert.

Wanneer men de beschikking heeft over een *rekenmachine*, kan de berekening van de coördinaten der driehoekspunten aanzienlijk worden bekort. Deze coördinaten worden dan berekend uit *voorwaartsche insnijding* uitgaande van de coördinaten van twee punten van het driehoeksnet. Hoewel het voldoende is de coördinaten

**Coördinatenberekening uit voorwaartsche insnijding met de rekenmachine**

dezer punten willekeurig te kiezen, zal ook hier een benadering van de werkelijke ligging voordeel opleveren bij de latere aansluiting.

Bij de berekening van de coördinaten uit voorwaartsche insnijding kan een voorafgaande berekening der driehoekszijden geheel vervallen. De formules voor de coördinatenberekening worden als volgt afgeleid.




In nevenstaande figuur is:

$$Y_p = Y_a + AP \cos \overline{AP}$$

$$Y_p = Y_a + \frac{AB \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \cos (\overline{AB} + \alpha).$$

Daar $\cos (\overline{AB} + \alpha) = \cos \overline{AB} \cos \alpha - \sin \overline{AB} \sin \alpha$ wordt voor $Y_p$ gevonden:

$$Y_p = Y_a + (Y_b - Y_a) \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} - (X_b - X_a) \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Teller en noemer in bovenstaande betrekkingen deelende door $\sin \beta \sin \alpha$, komt er:

$$Y_p = Y_a + (Y_b - Y_a) \frac{\cot \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta} - (X_b - X_a) \frac{1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

en:

$$Y_p (\cot \alpha + \cot \beta) = Y_a \cot \beta + Y_b \cot \alpha - (X_b - X_a)$$

waaruit tenslotte:

$$X_b - X_a = Y_a \cot \beta + Y_b \cot \alpha - Y_p (\cot \alpha + \cot \beta)$$

evenzoo:

$$Y_a - Y_b = X_a \cot \beta + X_b \cot \alpha - X_p (\cot \alpha + \cot \beta).$$

De berekening van $Y_p$ in de machine heeft als volgt plaats. Men bepaalt eerst $Y_a \cot \beta + Y_b \cot \alpha$ en vindt daarvan de waarde in het resultaatregister; vervolgens plaatst men in het instelregister $\cot \alpha + \cot \beta$, maakt het omdraaiingstelwerk schoon en draait nu aan de kruk zoodanig, dat in het resultaatwerk het bedrag $Y_a \cot \beta + Y_b \cot \alpha$ veranderd wordt in $X_b - X_a$. Het bedrag, hetwelk men gedraaid heeft, verschijnt nu als $- Y_p$ in het omdraaiingsregister. Voor de berekening van $X_p$ wordt op analoge wijze gehandeld.

Op deze wijze voortrekenende worden successievelijk de coördinaten van alle driehoekspunten verkregen.

## § 14. GELIJKVORMIGHEIDSTRANSFORMATIE

### AANSLUITING AAN TWEE PUNTEN

De aansluiting aan twee punten van een in een voorloopig stelsel berekend driehoeksnet kan op de volgende wijze geschieden. Duidt men de coördinaten van het voorloopige stelsel aan met $X$ en $Y$, die in het nieuwe stelsel (b.v. dat der R. D.) door $X'$ en $Y'$, dan wordt de aansluiting tot stand gebracht door een *gelijkvormigheidstransformatie*, bestaande uit een *verschuiving*, een *verdraaiing* en een *vergrooting*.

**Gelijkvormigheidstransformatie**

De *transformatieformules* luiden:

$$X' = \lambda \cos \omega \; X - \lambda \sin \omega \; Y + a = pX - qY + a \quad \text{en:}$$
$$Y' = \lambda \sin \omega \; X + \lambda \cos \omega \; Y + b = qX + pY + b$$

Heeft de aansluiting plaats aan de twee punten A en B, waartoe dus de coördinaten dier punten in beide stelsels bekend moeten zijn, dan zijn de grootheden $\omega$ en $\lambda$ ook bekend n.l.

$$\omega = \psi_{ab} - \psi'_{ab} \text{ en } \lambda = \frac{A'B'}{AB} = \frac{l'}{l}$$

en zijn de constanten $p$ en $q$ der transformatie te berekenen.
Daar:

$$\cos\omega = \cos(\psi_{ab} - \psi'_{ab}) = \sin\psi_{ab}\sin\psi'_{ab} + \cos\psi_{ab}\cos\psi'_{ab}$$

vindt men voor:

$$p = \lambda\cos\omega = \frac{(X_b - X_a)(X'_b - X'_a) + (Y_b - Y_a)(Y'_b - Y'_a)}{l^2}$$

en voor:

$$q = \lambda\sin\omega = \frac{(X_b - X_a)(Y'_b - Y'_a) - (Y_b - Y_a)(X'_b - X'_a)}{l^2}$$

waarin:

$$l^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2; \text{ verder is } \lambda^2 = p^2 + q^2$$

en dus:

$$\lambda = \frac{l'}{l} = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

**Formulier voor berekening**

Voor de toepassing van de gelijkvormigheidstransformatie behoeft men alleen $p$ en $q$ te berekenen; het in de bijlagen voorkomende formulier met rekenvoorbeeld wijst verder den in de practijk te volgen weg. Aangesloten wordt hier aan de punten $A$ en $B$; men bepaalt eerst de coördinatenverschillen voor die punten in het gegeven en in het nieuwe stelsel, daarna de grootheden $p$ en $q$ en de vergrooting $\lambda$.

Gebruik makende van deze gegevens kunnen in de twee laatste kolommen van het rekenformulier de gevraagde coördinaten worden berekend. De aldaar voorkomende producten kunnen worden gevonden zonder de coördinatenverschillen $X_{n-1} - X_n$ afzonderlijk te berekenen. Men plaatst daartoe $X_n$ in het omdraaiings-telwerk van de machine en in het instelwerk de waarde van $p$. Door draaiing aan de kruk verandert men nu in het telwerk $X_n$ in $X_{n-1}$, zoodat dus een bedrag $(X_{n-1} - X_n)$ gedraaid is. In het resultaat zal dus verschijnen het product $p\,(X_{n-1} - X_n)$.

Op analoge wijze handelt men voor de overige producten. In het rekenvoorbeeld zijn uitgaande van het aansluitingspunt $A$ de nieuwe coördinaten van $D$, $E$ en $F$ berekend en afgesloten op het aansluitingspunt $B$ (contrôle). Hierna zijn aanvangende in $B$ achtereenvolgens de nieuwe coördinaten van $G$, $I$, $C$ en $K$ berekend en afgesloten op $A$. Eindelijk zijn uitgaande van $A$ de coördinaten van $L$ en $H$ bepaald met afsluiting op $G$.

Omdat bij deze rekenwijze met coördinatenverschillen kon worden gewerkt, is het niet noodig de grootheden $a$ en $b$ uit de transformatieformules te berekenen.

**Grafische aansluiting aan twee punten**

Wanneer de draaiingshoek $\omega$ klein is en de vergrootingsfactor $\lambda$ nagenoeg gelijk aan 1, zullen de veranderingen in de coördinaten gering blijken te zijn. In dit geval kunnen deze veranderingen grafisch worden bepaald, zoodat de *aansluiting* aan twee punten *grafisch* kan worden tot stand gebracht.

Uit de transformatieformules volgt, dat de aan te brengen wijzigingen zullen zijn:

$$\begin{aligned} \triangle X &= X' - X = (p - 1)\,X - q\,Y + a \\ \triangle Y &= Y' - Y = qX + (p - 1)\,Y + b \qquad (1) \end{aligned}$$

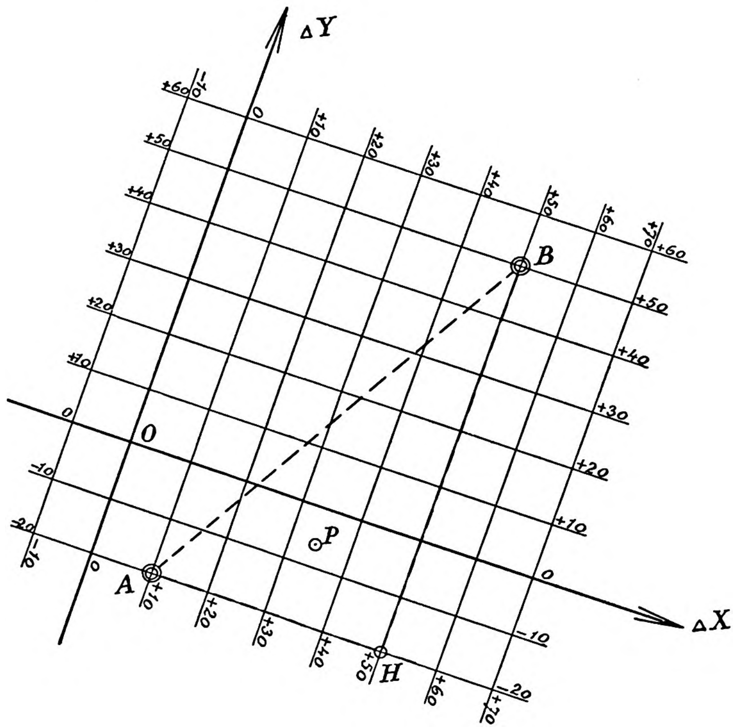
Daar $\omega$ klein is en $\lambda$ ongeveer gelijk aan de eenheid, is ook $p$ ongeveer 1 en is dus $(p - 1)$ een zeer kleine grootheid; eveneens is dit het geval met de grootheid $q$; de verschuivingen $a$ en $b$ kunnen buiten beschouwing blijven, omdat steeds met coördinatenverschillen kan worden gewerkt.

**Grafische methode Van der Tas**

Voor de grafische toepassing kan nu gehandeld worden volgens de methode „van der Tas". Uit vorenstaande formules (1) volgt n.l., dat de punten, waarvoor $\triangle X$ *constant* is, zijn gelegen *op een rechte lijn*. Dit is evenzoo het geval voor de punten, waarvoor $Y$ constant is. Immers voor $\triangle X$ en $\triangle Y$ constant, stellen (1) de vergelijkingen van 2 rechten voor op het $XY$-stelsel. Bij verschillende waarden van $\triangle X$ zijn de daarop betrekking hebbende rechte lijnen evenwijdig. Laat men $\triangle X$ met gelijke intervallen veranderen, dan zijn deze lijnen tevens aequidistant. Hetzelfde geldt voor $\triangle Y$; beide lijnensystemen staan loodrecht op elkaar, omdat de richtingscoëfficiënten elkaars tegengestelde en reciproke waarden vormen. Zij vormen bovendien een vierkantennet.

Als volgt wordt nu te werk gegaan. Men vervaardigt op een passende schaal, waartoe men in de meeste gevallen de schaal 1 à 10000 zal kunnen bezigen, een kaart van het net van driehoekspunten. Van de aansluitingspunten $A$ en $B$, die in beide coördinatenstelsels zijn berekend, zijn de wijzigingen:

$$\triangle X = X' - X \quad \text{en} \quad \triangle Y = Y' - Y \quad \text{bekend.}$$



Met de verbindingslijn $AB$ als schuine zijde construeert men in de kaart een rechthoekigen driehoek, zoodanig, dat de rechthoekzijden $AH$ en $BH$ zich verhouden als:

$$(\triangle X_b - \triangle X_a) : (\triangle Y_b - \triangle Y_a).$$

De aan de coördinaten der aansluitingspunten $A$ en $B$ aan te brengen wijzigingen zijn in het voorbeeld resp.:

$\triangle X_a = +10$ cm; $\triangle Y_a = -20$ cm en $\triangle X_b = +50$ cm; $\triangle Y_b = +50$ cm.

De verhouding $AH : BH$ is dus 40 : 70. Aan de hand van deze gegevens is nu te teekenen het rechthoekige assenstelsel $\triangle X$, $\triangle Y$, in de figuur voorgesteld, waarin de coördinaten van $A$ en $B$ gelijk zijn aan de wijzigingen, te geven aan de coördinaten dier punten.

De oorsprong van dit assenstelsel is $O$; er is een ruitennet in aangebracht, hetwelk het mogelijk maakt om voor ieder willekeurig punt van het driehoeksnet onmiddellijk de wijzigingen $\triangle X$ en $\triangle Y$ af te lezen. Voor het punt $P$ bijv. zijn deze wijzigingen:

$$\triangle X_p = +34 \text{ cm}; \triangle Y_p = -6 \text{ cm}.$$

De grafische bepaling kan alleen worden toegepast, als de aan te brengen correcties niet te groot zijn. Het moet mogelijk blijven de schaal van het ruitennet zoo te kiezen, dat de correcties kunnen worden afgelezen of uitgepast op centimeters nauwkeurig, zonder dat hooge eischen behoeven te worden gesteld aan de kaarteering van het ruitennet.

Het assenstelsel $\triangle X$, $\triangle Y$ moet verder zoo worden geconstrueerd, dat het door *draaiing* uit het oorspronkelijke, het $X$, $Y$ stelsel, kan worden afgeleid; hiermede behoort rekening te worden gehouden bij de constructie van den driehoek $ABH$; er moet dus gewaakt worden tegen „spiegeling".

### OVERBEPAALDE AANSLUITING AAN TWEE PUNTEN

**Overbepaalde aansluiting**

Wanneer men voor de aansluiting de beschikking heeft over drie of meer punten, kan onder gebruikmaking van de hiervoor afgeleide formules, de aansluiting eveneens tot stand worden gebracht. Het vraagstuk der gelijkvormigheidstransformatie is dan overbepaald, zoodat de oplossing met behulp van de methode der kleinste kwadraten moet geschieden.

De transformatieformules luidden:

$$X' = pX - qY + a$$
$$Y' = qX + pY + b.$$

Elk in beide stelsels gegeven punt levert twee vergelijkingen voor de bepaling van $p$, $q$, $a$ en $b$; bij meer dan vier vergelijkingen moet vereffening plaats hebben. Dit geschiedt door aan $X'_i$ een correctie $v_i$, aan $Y'_i$ een correctie $w_i$ te geven.

Wij bepalen nu de onbekenden $p$, $q$, $a$ en $b$ zoodanig, dat:

$$[vv] + [ww] \text{ minimum wordt.} \qquad (1)$$

Stellen wij:

$$v_i^2 + w_i^2 = s_i^2$$

dan heeft $s_i$ de beteekenis van te zijn de afstand van het gecorrigeerde aansluitingspunt tot het ongecorrigeerde. Door (1) tot een minimum te maken, wordt dus de

som der kwadraten dezer afstanden minimum. We hebben als correctievergelijkingen:

$$v_i = pX_i - qY_i + a - X'_i$$
$$w_i = pY_i + qX_i + b - Y'_i. \qquad (i \quad 1, 2 \ldots\ldots\ldots n)$$

Op de bekende wijze worden hieruit de normaalvergelijkingen opgemaakt volgens het vraagstuk der indirecte waarnemingen. In het algemeen zal men aan de aansluitingspunten gelijke gewichten kunnen toekennen. Indien de omstandigheden daartoe aanleiding geven, kan aan genoemde punten natuurlijk ook verschillend gewicht worden gegeven.

Bij gelijke gewichten zullen de normaalvergelijkingen luiden:

$$\begin{array}{llllll} p\,[XX + YY] & & + a\,[X] & + b\,[Y] & - [XX' + YY'] & = 0 \\ & q\,[XX + YY] & - a\,[Y] & + b\,[X] & - [XY' - X'Y] & = 0 \\ p\,[X] & -\, q\,[Y] & + n\,a & & - [X'] & = 0 \\ p\,[Y] & +\, q\,[X] & & + nb & - [Y'] & = 0 \end{array}$$

Een belangrijke vereenvoudiging zal te verkrijgen zijn, wanneer in beide stelsels de oorsprong van het coördinatenstelsel wordt gelegd in het zwaartepunt der aansluitingspunten.

Noemt men de coördinaten van de zwaartepunten in het oude en in het nieuwe stelsel resp. $X_z$, $Y_z$ en $X'_z$, $Y'_z$, dan is:

$$X_z = \frac{[X]}{n}; \; Y_z = \frac{[Y]}{n}$$

en:

$$X'_z = \frac{[X']}{n}; \; Y'_z = \frac{[Y']}{n}.$$

Met deze zwaartepunten als oorsprong worden de coördinaten van de onderscheiden punten in het oude stelsel:

$$\overline{X}_i = X_i - X_z; \qquad \overline{Y}_i = Y_i - Y_z$$

en in het nieuwe:

$$\overline{X}'_i = X'_i - X'_z; \qquad \overline{Y}'_i = Y'_i - Y'_z.$$

Hieruit volgt dat:

$[\overline{X}] = [X] - nX_z$ en daar $nX_z = [X]$ is dus:
$[\overline{X}] = 0$, zoo ook: $[\overline{Y}] = 0$; $[\overline{X}'] = 0$ en $[\overline{Y}'] = 0$.

Onderstellende, dat vooraf de oorsprongen der coördinatensystemen naar de zwaartepunten waren verlegd, zou men als normaalvergelijkingen hebben verkregen:

$$\begin{array}{llll} p\,[\overline{XX} + \overline{YY}] & & - [\overline{XX}' + \overline{YY}'] & = 0 \\ & q\,[\overline{XX} + \overline{YY}] & - [\overline{XY}' - \overline{X}'\overline{Y}] & = 0 \\ & n\,a & & = 0 \\ & nb & & = 0 \end{array}$$

Door de toegepaste kunstgreep worden dus de grootheden $a$ en $b$ nul, hetgeen meetkundig geinterpreteerd beteekent, dat de zwaartepunten van beide figuren door de afbeelding in elkander worden overgevoerd, derhalve correspondeerende punten zijn.

In de nieuwe coördinaten geschreven, luiden nu de transformatieformules:

$$\overline{X}'_i = p\overline{X}_i - q\overline{Y}_i$$
$$\overline{Y}'_i = q\overline{X}_i + p\overline{Y}_i.$$

Bij grooten draaiingshoek en vergrootingsfactor is het natuurlijk gewenscht benaderde waarden voor de onbekenden $p$ en $q$ in te voeren. Is de draaiingshoek klein en de vergrootingsfactor nagenoeg 1, dan zal $q$ klein zijn en $p$ in de buurt van 1 liggen. Voeren we in dit geval voor $p$ als benadering 1 in en schrijven we:

$$p = 1 + \triangle\, p$$

dan worden de correctievergelijkingen:

$$v_i = \triangle\, p\, \overline{X}_i - q\, \overline{Y}_i - \triangle\, \overline{X}_i$$
$$w_i = \triangle\, p\, \overline{Y}_i + q\, \overline{X}_i - \triangle\, \overline{Y}_i$$

waarin:

$$\triangle\, \overline{X}_i = \overline{X}'_i - \overline{X}_i \qquad \text{en} \qquad \triangle\, \overline{Y}_i = \overline{Y}'_i - \overline{Y}_i.$$

Hieruit volgen de normaalvergelijkingen:

$$\triangle\, p\, [\overline{XX} + \overline{YY}] \qquad\qquad - [\overline{X} \triangle \overline{X} + \overline{Y} \triangle \overline{Y}] = 0$$
$$q\, [\overline{XX} + \overline{YY}] - [\overline{X} \triangle \overline{Y} - \overline{Y} \triangle \overline{X}] = 0$$

waaruit wordt gevonden:

$$\triangle\, p = \frac{[\overline{X} \triangle \overline{X} + \overline{Y} \triangle \overline{Y}]}{[\overline{XX} + \overline{YY}]} \qquad \text{en:} \qquad q = \frac{[\overline{X} \triangle \overline{Y} - \overline{Y} \triangle \overline{X}]}{[\overline{XX} + \overline{YY}]}$$

Opgemerkt wordt, dat de noemer in deze uitdrukkingen de som is van de kwadraten der afstanden van elk der aansluitingspunten tot het zwaartepunt van deze punten. Men kan deze afstanden met voldoende nauwkeurigheid van een kaart uitpassen.

Een contrôle op de berekening wordt gevonden door $[vv + ww]$ te berekenen uit de onderscheiden grootheden $v_i$ en $w_i$ en vervolgens uit de betrekking:

$$[vv + ww] = [\triangle\overline{X} \triangle\overline{X} + \triangle\overline{Y} \triangle\overline{Y}] - \triangle p [\overline{X} \triangle\overline{X} + \overline{Y} \triangle\overline{Y}] - q[\overline{X} \triangle \overline{Y} - \overline{Y}\triangle\overline{X}].$$

Nadat de transformatieformules op voorgeschreven wijze bepaald zijn, kan men door berekening de overige punten transformeeren of wel de transformatie verrichten langs grafischen weg met behulp van een te construeeren kwadratennet.

## § 15. AFFINE EN CONFORME TRANSFORMATIE AANSLUITING AAN DRIE PUNTEN

De aansluiting aan drie punten heeft plaats volgens een *affine* of wel door een *conforme transformatie* van het driehoeksnet. Hoewel laatstgenoemde methode door haar conformiteit en door de geringere hoekcorrectiën in de onderscheiden driehoeken van het net, voordeelen oplevert bij aansluiting aan *drie* punten, kan de affine methode grooter aanpassingsmogelijkheden bieden, die duidelijk naar voren treden, indien voor de aansluiting een grooter aantal dan drie punten van hoogere orde voorhanden zijn.

**Affine transformatie**

**Conforme transformatie**

Beide methoden zullen hieronder in het kort worden toegelicht.

## AANSLUITING AAN DRIE PUNTEN

Duidt men in het oude stelsel de coördinaten der punten weer aan door $X$ en $Y$, in het nieuwe door $X'$ en $Y'$, zoo luiden de formules der affine transformatie:

$$X' = a_1\, X + b_1\, Y + c_1$$
$$Y' = a_2\, X + b_2\, Y + c_2.$$

Aangezien in deze formules zes constanten optreden, kan de transformatie onmiddellijk gelden voor de aansluiting aan *drie* punten. Noemt men de aansluitingspunten $A$, $B$ en $C$ en hunne coördinaten in de beide stelsels resp.:

$$X_A\; X_B\; X_C,\; Y_A\; Y_B\; Y_C \text{ en } X'_A\; X'_B\; X'_C\;,\; Y'_A\; Y'_B\; Y'_C$$

dan kunnen de constanten $a_1$, $b_1$ en $c_1$ worden bepaald uit de betrekkingen:

$$X'_A = a_1\, X_A + b_1\, Y_A + c_1$$
$$X'_B = a_1\, X_B + b_1\, Y_B + c_1$$
$$X'_C = a_1\, X_C + b_1\, Y_C + c_1$$

Hieruit kan $c_1$ worden geëlimineerd als volgt:

$$X'_B - X'_A = a_1\,(X_B - X_A) + b_1\,(Y_B - Y_A)$$
$$X'_C - X'_A = a_1\,(X_C - X_A) + b_1\,(Y_C - Y_A)$$

Na vermenigvuldiging van de eerste dezer vergelijkingen met den coëfficiënt van $b_1$ in de tweede vergelijking en vervolgens de tweede vergelijking met den coëfficiënt van $b_1$ in de eerste, worden verkregen de betrekkingen:

**Berekening van de waarden der constanten $a_1$ $b_1$ $a_2$ $b_2$**

$$(X'_B - X'_A)\,(Y_C - Y_A) = a_1\,(X_B - X_A)\,(Y_C - Y_A) + b_1\,(Y_B - Y_A)\,(Y_C - Y_A)$$
$$(X'_C - X'_A)\,(Y_B - Y_A) = a_1\,(X_C - X_A)\,(Y_B - Y_A) + b_1\,(Y_B - Y_A)\,(Y_C - Y_A).$$

Uit hun verschil volgt voor:

$$a_1 = \frac{(X'_B - X'_A)\,(Y_C - Y_A) - (X'_C - X'_A)\,(Y_B - Y_A)}{2\,.\,0}.$$

Op analoge wijze wordt gevonden voor:

$$b_1 = \frac{-\,(X'_B - X'_A)\,(X_C - X_A) + (X'_C - X'_A)\,(X_B - X_A)}{2\,.\,0}$$

waarin:

$$2\,.\,0 = (X_B - X_A)\,(Y_C - Y_A) - (X_C - X_A)\,(Y_B - Y_A).$$

Voor de berekening van $a_2$, $b_2$ en $c_2$ heeft men:

$$Y'_A = a_2\, X_A + b_2\, Y_A + c_2$$
$$Y'_B = a_2\, X_B + b_2\, Y_B + c_2$$
$$Y'_C = a_2\, X_C + b_2\, Y_C + c_2.$$

Na elimineering van $c_2$ vindt men op gelijke wijze als voren, voor:

$$a_2 = \frac{(Y'_B - Y'_A)\,(Y_C - Y_A) - (Y'_C - Y'_A)\,(Y_B - Y_A)}{2\,.\,0}$$

en voor:

$$b_2 = \frac{-\,(Y'_B - Y'_A)\,(X_C - X_A) + (Y'_C - Y'_A)\,(X_B - X_A)}{2\,.\,0}$$

Aangezien de berekening met coördinaten-verschillen zal worden uitgevoerd, is het niet noodig de waarden der constanten $c_1$ en $c_2$ te kennen.

De transformatie heeft de eigenschap, dat de graad van een kromme geen verandering ondergaat. Rechte lijnen blijven derhalve rechte lijnen; een cirkel gaat in het algemeen over in een ellips. Verder blijven evenwijdige lijnen evenwijdig; de verhouding van de afstanden van 3 punten op een rechte lijn is voor elke rechte invariant.

Voor de coördinaten van elk tweetal punten geldt:

$$X'_{n+1} - X'_n = a_1 (X_{n+1} - X_n) + b_1 (Y_{n+1} - Y_n)$$
$$Y'_{n+1} - Y'_n = a_2 (X_{n+1} - X_n) + b_2 (Y_{n+1} - Y_n).$$

Daar de practijk is, dat bij aansluiting aan drie punten reeds op de vroeger behandelde wijze aan twee punten is aangesloten, blijkt uit de gevonden betrekkingen voor $a_1$, $b_1$, $a_2$ en $b_2$, dat de waarden van $a_1$ en $b_2$ dicht bij 1 gelegen zijn, zoodat voor $a_1$ en $b_2$ benaderde waarden gelijk aan 1 kunnen worden ingevoerd en kan worden gesteld:

$$a_1 = 1 + \triangle a_1 \text{ en } b_2 = 1 + \triangle b_2$$

Uit bovenstaande betrekkingen wordt nu gevonden:

$$X'_{n+1} = X'_n + (X_{n+1} - X_n) + \triangle a_1 (X_{n+1} - X_n) + b_1 (Y_{n+1} - Y_n)$$
$$Y'_{n+1} = Y'_n + (Y_{n+1} - Y_n) + a_2 (X_{n+1} - X_n) + \triangle b_2 (Y_{n+1} - Y_n)$$

**Formules voor de berekening**

De berekening verloopt nu zeer regelmatig. De waarden van de constanten $\triangle a_1$, $b_1$, $a_2$ en $\triangle b_2$ worden vooraf bepaald en in het hoofd van het formulier ingeschreven. Vervolgens worden ingevuld de in het oude stelsel berekende coördinaten, eerst die van de drie aansluitingspunten, daarna die van alle aan te sluiten punten. Van elke twee opvolgende punten bepaalt men tevens de coördinaten-verschillen. Voor het eerste aansluitingspunt worden vervolgens in de daartoe bestemde kolommen de coördinaten in het nieuwe stelsel (dat der R. D.) ingeschreven.

**Gang van de berekening der coördinaten in het nieuwe stelsel**

Van punt tot punt gaande worden nu in laatstbedoelde kolommen de coördinaten van alle punten in het nieuwe stelsel verkregen, door telkens bij de nieuwe coördinaten van een vorig punt de berekende waarden van de termen in het tweede lid van resp. elk der vorenstaande vergelijkingen te voegen. Eerst vindt men dan de coördinaten van de beide andere aansluitingspunten. Deze uitkomsten moeten overeenstemmen met de daarvoor bekende waarden; is dit het geval, is er tevens contrôle verkregen op de berekening van de constanten $\triangle a_1$, $b_1$, $a_2$ en $\triangle b_2$, waarna men veilig de berekening, voor wat betreft de overige punten, kan voortzetten.

Ter contrôle zal men bij deze berekening zorgen, dat men geregeld terugkeert tot een eerder getransformeerd en gecontroleerd driehoekspunt; de berekening wordt ten slotte beëindigd bij een reeds getransformeerd punt.

### AANSLUITING AAN MEER DAN DRIE PUNTEN

### OVERBEPAALDE AFFINE AANSLUITING

Wanneer men in beide stelsels beschikt over de coördinaten van *vier* of *meer* driehoekspunten, kan men ook voor de aansluiting aan deze punten de formules der affine transformatie ten grondslag leggen. Het vraagstuk is dan „overbepaald”, zoodat de oplossing met behulp van de methode der kleinste kwadraten moet geschieden.

**Overbepaalde aansluiting; toepassing der methode der KV**

Noemt men de verschuiving van een punt in het nieuwe stelsel $s$, zoo wordt de aansluiting tot stand gebracht door de voorwaarde te stellen:

$$[s\ s] \text{ minimum.}$$

Stelt men de correcties, aan te brengen aan de coördinatenverschillen in de richting van abscis en ordinaat in het nieuwe stelsel, resp. voor door $v$ en $w$, dan is aangezien $s^2 = v^2 + w^2$ voor de minimum-voorwaarde te stellen:

$$[v\ v] + [w\ w] \text{ minimum} \tag{1}$$

aan welke voorwaarde voldaan wordt door afzonderlijk $[v\ v]$ en $[w\ w]$ tot een minimum te maken.

Noemen we in het oude stelsel de coördinaten der aan te sluiten punten weer $X$ en $Y$ en in het nieuwe $X'$ en $Y'$. Men heeft dan:

$$X' + v = a_1\ X + b_1\ Y + c_1 \tag{2}$$

Het aantal van deze betrekkingen is gelijk aan dat der aansluitingspunten. Evenzoo zal men vinden een zelfde aantal vergelijkingen van dezen vorm:

$$Y' + w = a_2\ X + b_2\ Y + c_2 \tag{3}$$

Men krijgt nu naast elkaar twee vereffeningsvraagstukken op te lossen; bij het eene bepaalt men $a_1$, $b_1$ en $c_1$, bij het tweede $a_2$, $b_2$ en $c_2$. Het eerste dezer vraagstukken beschouwende, worden voor de oplossing daarvan ingevoerd benaderde waarden voor $a_1$ en $b_1$, zooals vroeger is aangegeven. Deze waarden worden weer berekend uit de stellen coördinaten van drie der aansluitingspunten. Is reeds aan twee punten aangesloten, dan is het duidelijk, dat voor $a_1$ de benaderde waarde 1 kan worden genomen, omdat nà deze aansluiting de verdere vervormingen bij aansluiting aan drie punten gering zijn, zoodat de waarde van $a_1$ in de buurt van 1, die van $b$ in de buurt van 0 gelegen moet zijn. Bij het tweede vraagstuk is $b_2$ in de buurt van 1, $a_2$ in de buurt van 0 gelegen.

In het getallenvoorbeeld is het vraagstuk der overbepaalde affine aansluiting behandeld. De aansluiting aan de punten $A$ en $B$ is daar reeds verricht, terwijl aangesloten moet worden aan de punten $A$, $B$, $C$ en $E$.

Voor $a_1$ schrijvende $1 + \triangle\ a_1$ wordt uit de uitdrukkingen (2) in het algemeen gevonden:

**Correctie- en normaalvergelijkingen**

$$X'_i + v_i = X_i + X_i \triangle\ a_1 + Y_i\, b_1 + c_1$$

en als *correctievergelijkingen*:

$$v_i = X_i - X'_i + X_i \triangle\ a_1 + Y_i\, b_1 + c_1 \tag{4}$$

waarbij $i$ in het algemeen is $1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ldots\ n$.

Uit de correctievergelijkingen (4) worden op de gebruikelijke wijze de navolgende *normaalvergelijkingen* verkregen:

$$\begin{aligned} [X_i\ (X_i - X'_i)] + [X_i\ X_i] \triangle\ a_1 + [X_i\ Y_i]\ b_1 + [X_i]\ c_1 &= 0 \\ [Y_i\ (X_i - X'_i)] + [X_i\ Y_i] \triangle\ a_1 + [Y_i\ Y_i]\ b_1 + [Y_i]\ c_1 &= 0 \\ [X_i - X'_i] + [X_i] \triangle\ a_1 + [Y_i]\ b_1 + n\, c_1 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Uit deze vergelijkingen kunnen $\triangle\ a_1$, $b_1$ en $c_1$ worden opgelost. Evenals bij de overbepaalde gelijkvormigheidstransformatie kan ook hier vereenvoudiging worden verkregen, als men te voren, zoowel in het oude als in het nieuwe stelsel de oorsprong van het coördinatenstelsel legt in het zwaartepunt der aansluitingspunten.

Het aantal dier aansluitingspunten weder $n$ stellende en de coördinaten der zwaartepunten resp. $X_z$, $Y_z$ en $X'_z$, $Y'_z$ noemende, wordt in het oude stelsel:

$$X_z = \frac{[X_i]}{n} \; ; \; Y_z = \frac{[Y_i]}{n}$$

en in het nieuwe:

$$X'_z = \frac{[X'_i]}{n} \; ; \; Y'_z = \frac{[Y'_i]}{n}$$

Met deze zwaartepunten als oorsprong vindt men vervolgens in het oude stelsel:

$$\overline{X}_i = X_i - X_z \; ; \; \overline{Y}_i = Y_i - Y_z$$

in het nieuwe:

$$\overline{X}'_i = X'_i - X'_z \; ; \; \overline{Y}'_i = Y'_i - Y'_z$$

waaruit weer:

$$[\overline{X}_i] = [\overline{Y}_i] = [\overline{X}'_i] = [\overline{Y}'_i] = 0$$

ook is:

$$[\overline{X}_i - \overline{X}'_i] = [\overline{X}_i] - [\overline{X}'_i] = 0 \qquad (6)$$

en eveneens:

$$[\overline{Y}_i - \overline{Y}'_i] = 0$$

Had men de zwaartepunten als oorsprong gekozen, zoo zouden normaalvergelijkingen van den vorm (5) worden verkregen, met dit verschil, dat boven de coördinaten een liggend streepje geplaatst is. In verband met (6) ondergaan de vergelijkingen nog een vereenvoudiging, zoodat ze zullen luiden:

$$[\overline{X}_i (\overline{X}_i - \overline{X}'_i)] + [\overline{X}_i \overline{X}_i] \triangle a_1 + [\overline{X}_i \overline{Y}_i] b_1 = 0 \qquad (7)$$
$$[\overline{Y}_i (\overline{X}_i - \overline{X}'_i)] + [\overline{X}_i \overline{Y}_i] \triangle a_1 + [\overline{Y}_i \overline{Y}_i] b_1 = 0$$

Van de derde normaalvergelijking blijft over $n\, c_1 = 0$; dus $c_1 = 0$.

Normaalvergelijkingen

Analoog wordt verkregen:

$$[\overline{X}_i (\overline{Y}_i - \overline{Y}'_i)] + [\overline{X}_i \overline{X}_i] a_2 + [\overline{X}_i \overline{Y}_i] \triangle b_2 = 0 \qquad (8)$$
$$[\overline{Y}_i (\overline{Y}_i - \overline{Y}'_i)] + [\overline{X}_i \overline{Y}_i] a_2 + [\overline{Y}_i \overline{Y}_i] \triangle b_2 = 0$$

De transformatieformules in de coördinaten der *verschoven* stelsels luiden derhalve:

$$\overline{X}'_i = \overline{X}_i (1 + \triangle a_1) + \overline{Y}_i b_1 \qquad (9)$$
$$\overline{Y}'_i = \overline{X}_i a_2 \qquad + \overline{Y}_i (1 + \triangle b_2)$$

Aangezien:

$$\overline{X}_z = \overline{Y}_z = 0 \quad \text{en} \quad \overline{X}'_z = \overline{Y}'_z = 0$$

valt uit (9) te lezen, dat de zwaartepunten correspondeerende punten zijn. In het bijgevoegde rekenvoorbeeld zijn in het gegeven stelsel de coördinaten $\overline{X}_i$ en $\overline{Y}_i$ van het verschoven stelsel bepaald door van elke $X_i$ en $Y_i$ resp. $X_z$ en $Y_z$ af te trekken; vervolgens worden berekend $X_i - X'_i$ en $Y_i - Y'_i$, uit welke waarden door een zelfde bewerking $\overline{X}_i - \overline{X}'_i$ en $\overline{Y}_i - \overline{Y}'_i$ worden gevonden; deze verschillen worden in de verdere berekening $\triangle X$ en $\triangle Y$ genoemd. In die berekening zijn $\overline{X}_i$ en $\overline{Y}_i$ in decameters vermeld en $v$, $w$, $\overline{X}_i - \overline{X}'_i$ en $\overline{Y}_i - \overline{Y}'_i$ in mm, zoodat de onbekenden worden $10^4 \triangle a_1$, $10^4 b_1$, $10^4 a_2$ en $10^4 \triangle b_2$.

De berekening verloopt op de gewone wijze met toepassing van de gebruikelijke somcontrôle. De op te lossen normaalvergelijkingen (7) en (8) zijn voor het rekenvoorbeeld, in getallenwaarde uitgedrukt, de volgende:

$$\begin{aligned} 97170 \triangle a_1 + 17469 \quad b_1 - 6885 &= 0 \\ 17469 \triangle a_1 + 24518 \quad b_1 + 10125 &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

en

$$\begin{aligned} 97170 \quad a_2 + 17469 \triangle b_2 - 412 &= 0 \\ 17469 \quad a_2 + 24518 \triangle b_2 + 6700 &= 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Zijn de onbekenden gevonden, dan kunnen uit de betrekkingen:

$$v_i = \triangle \overline{X}_i + \overline{X}_i \triangle a_1 + \overline{Y}_i \, b_1$$

en

$$w_i = \triangle \overline{Y}_i + \overline{X}_i \, a_2 + \overline{Y}_i \triangle b_2$$

de onderscheiden waarden voor $v$ en $w$ worden gevonden, waaruit de waarden $[v\,v]$ en $[w\,w]$, welke op de bekende wijze worden gecontroleerd met de betrekkingen:

$$[v\,v] = [\triangle \overline{X} \triangle \overline{X}] + [\triangle \overline{X} \cdot \overline{X}] \triangle a_1 + [\triangle \overline{X} \cdot \overline{Y}] \, b_1$$

en:

$$[w\,w] = [\triangle \overline{Y} \triangle \overline{Y}] + [\triangle \overline{Y} \cdot \overline{X}] \, a_2 + [\triangle \overline{Y} \cdot \overline{Y}] \triangle b_2$$

Hierna kan in het rekenformulier de transformatie op de reeds bekende wijze tot stand worden gebracht. Dit behoeft geen nadere toelichting. Men vangt aan met het punt $Z$ en berekent eerst de nieuwe coördinaten (R. D.) van de punten van aansluiting n.l. $A$, $B$, $C$ en $E$. De daarbij optredende verschillen moeten, behoudens kleine afrondingsfouten gelijk zijn aan de eerder berekende $v_i$ en $w_i$.

Is dit het geval, dan blijkt, dat er in de berekening geen fouten zijn gemaakt en dat de constanten met juistheid zijn vastgesteld. Vervolgens worden de andere punten van het driehoeksnet aangesloten, waarbij weder de voorzorgen in acht worden genomen, in het vorige hoofdstuk uiteengezet.

### GRAFISCHE AANSLUITING AAN DRIE PUNTEN
### METHODE VAN DER TAS

Wanneer de wijzigingen aan de coördinaten der aansluitingspunten niet te groot zijn, kunnen bij aansluiting aan drie punten de aan de onderscheiden punten van het driehoeksnet aan te brengen correcties langs grafischen weg worden bepaald volgens een door *van der Tas* aangegeven methode.

Ter toelichting het volgende. De transformatieformules luiden:

**Grafische aansluiting aan drie punten Methode van der Tas**

$$\begin{aligned} X' &= a_1 X + b_1 Y + c_1 \\ Y' &= a_2 X + b_2 Y + c_2 \end{aligned}$$

of:

$$\triangle X = X' - X = (a_1 - 1) X - b_1 Y + c_1$$

en:

$$\triangle Y = Y' - Y = a_2 X + (b_2 - 1) Y + c_2 \qquad (a)$$

Hieruit volgt weer dat, aangezien beide betrekkingen (a) vergelijkingen voorstellen van twee rechten, de punten met gelijke correcties $\triangle X$ zijn gelegen op een rechte lijn. Laat men $\triangle X$ met *gelijke* intervallen veranderen, zoo verkrijgt men als meetkundige plaatsen een aantal evenwijdige, aequidistante rechte lijnen. Voor de correcties $\triangle Y$ gelden overeenkomstige eigenschappen.

Men gaat nu als volgt te werk:

Het driehoeksnet wordt gekaarteerd op een zoodanige schaal, dat de correcties aan de coördinaten der punten naderhand met voldoende nauwkeurigheid in de teekening kunnen worden afgelezen. In vele gevallen is hiervoor de schaal 1 à 10.000 geschikt.

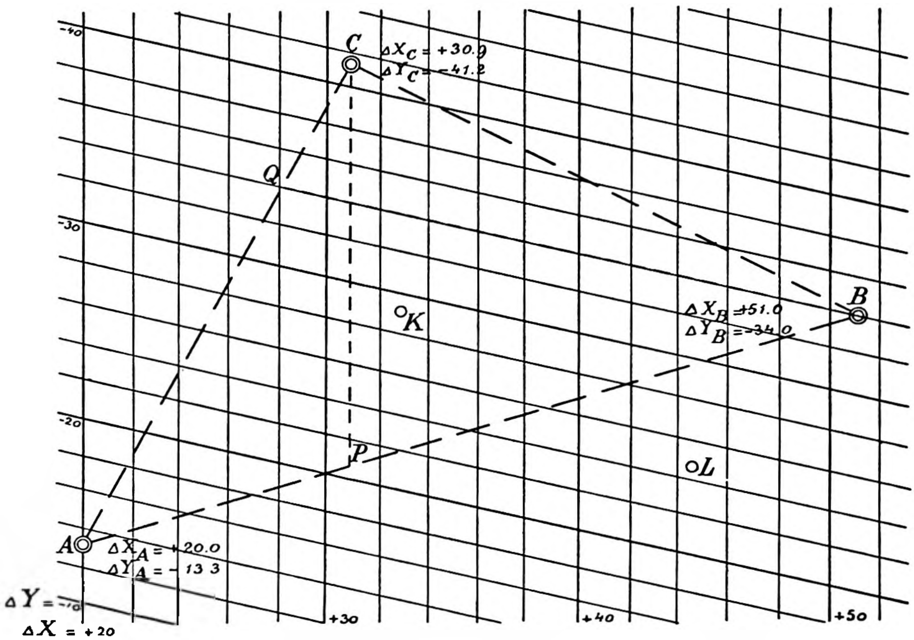
In de figuur zijn $A$, $B$ en $C$ de aansluitingspunten; de daaraan te geven correcties zijn:

$$\triangle X_A = +20{,}0 \text{ cm} \qquad \triangle Y_A = -13{,}3 \text{ cm}$$
$$\triangle X_B = +51{,}0 \text{ „} \qquad \triangle Y_B = -34{,}0 \text{ „}$$
$$\triangle X_C = +30{,}9 \text{ „} \qquad \triangle Y_C = -41{,}2 \text{ „}$$

Men construeert nu op $A\ B$ het punt $P$, zoodanig dat:

$$AP : PB = (\triangle X_C - \triangle X_A) : (\triangle X_B - \triangle X_C) = 10{,}9 : 20{,}1$$

*Grafische Methode „van der Tas"*




Het punt $P$ en alle op de lijn $C\ P$ gelegen punten zullen dan een zelfde correctie $\triangle X = +30{,}9$ verkrijgen als het punt $C$.

Evenwijdig aan de lijn $C\ P$ worden nu op gelijke afstanden lijnen getrokken; men kiest die afstanden zoo dicht bij elkaar (in de figuur op afstanden, voorstellende 2 cm) dat men op het oog de $\triangle X$ kan aflezen of uitpassen met een nauwkeurigheid voor den cm en zoo noodig met schatting van den mm.

Voor de correcties $\triangle Y$ wordt analoog gehandeld; men construeert n.l. op de lijn $C\ A$ een punt $Q$, zoodanig, dat

$$C\,Q : Q\,A = (\triangle Y_C - \triangle Y_B) : (\triangle Y_B - \triangle Y_A) = 7{,}2 : 20{,}7$$

en trekt lijnen evenwijdig aan de lijn $B\,Q$ op gelijke wijze als voor $C\,P$ is geschied; de correcties $\triangle\ Y$ worden ten opzichte van deze lijnen afgelezen.

Zoo zijn voor de aan te sluiten punten $K$ en $L$ de correcties:

$$\triangle\ X_K = +\ 32{,}7\ ;\ \triangle\ Y_K = -\ 29{,}0$$
$$\triangle\ X_L = +\ 44{,}5\ ;\ \triangle\ Y_L = -\ 24{,}4$$

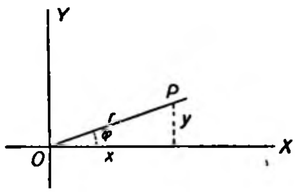
### CONFORME AANSLUITING AAN DRIE PUNTEN

In het gegeven secundaire stelsel worden de coördinaten van een punt aangeduid met $x$ en $y$, in het nieuwe stelsel, het primaire met $u$ en $v$, welke coördinaten worden samengevat in de *complexe getallen*:

$$z = x + i\,y; \qquad w = u + i\,v; \qquad \text{met} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Omdat in een complex getal twee grootheden optreden, n.l. het aantal *reëele* en het aantal *imaginaire* eenheden, zal, als men die grootheden als rechthoekige coördinaten van een punt opvat, met elk complex getal een punt correspondeeren.

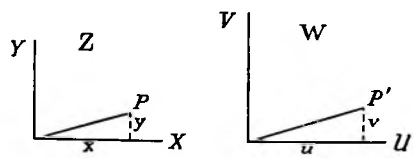
**Complexe getallen**




In de figuur stelt $P$ het punt voor, hetwelk gegeven is door het complexe getal $z = x + iy$.

Het getal $z$ kan ook geschreven worden: $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, waarin $r$, de lengte van het lijnsegment $O\,P$, de *modulus* en $\varphi$, de hoek, die het segment $O\,P$ maakt met de $X$-as, het *argument* van het complexe getal wordt genoemd.

Bepaalt elk complex getal de ligging van een punt, omgekeerd correspondeert met elk punt een complex getal. Beschouwt men twee vlakken, een $Z$-vlak en een $W$-vlak met daarin gelegen punten $z = x + iy$ en $w = u + iv$ en veronderstelt men, dat tusschen $w$ en $z$ betrekking bestaat:




$$w = f\,(z)$$

dan zal, indien de functie eenwaardig is, bij elke waarde van $z$ een waarde van $w$ kunnen worden berekend uit de gegeven functie. Dit beteekent, dat met elk punt $P$ van het $Z$-vlak een punt $P'$ in het $W$-vlak correspondeert. Het $Z$-vlak wordt dus punt voor punt op het $W$-vlak afgebeeld. Deze afbeelding is *conform.*

Bij een conforme aansluiting moet de secundaire figuur door een *conforme transformatie*:

$$w = f\,(z)$$

zoodanig worden vervormd, dat eenige gegeven punten van deze figuur tot samenvallen moeten worden gebracht met bepaalde punten van de primaire figuur.

Voor eenige waarden van $z$ moet dus $w$ voorgeschreven waarden aannemen. Zijn derhalve $z_1$, $z_2$ ......... de complexe getallen van de aansluitingspunten $I$, $II$, ......... in het secundaire vlak en $w_1$, $w_2$ ......... die van dezelfde punten in het primaire, dan moet:

$$w_1 = f\,(z_1),\ w_2 = f\,(z_2),\ w_3 = f\,(z_3)\ \ldots\ldots\ldots$$

Aangezien in de practijk de waarden $w_1$, $w_2$, ......... weinig zullen verschillen van $z_1$, $z_2$, ......... stellen wij

$$w = z + \triangle z$$
$$z + \triangle z = f(z)$$
$$\triangle z = f(z) - z = F(z).$$

$F(z)$ moet nu zoo gekozen worden, dat $\triangle z$ de voorgeschreven waarden aanneemt. Gebruik makende van de interpolatieformule van *Lagrange* kunnen wij bij aansluiting aan drie punten voor een willekeurig punt $P$ stellen:

$$\triangle z_p = \triangle z_1 \frac{(z_p - z_2)(z_p - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} + \triangle z_2 \frac{(z_p - z_1)(z_p - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} + $$
$$+ \triangle z_3 \frac{(z_p - z_1)(z_p - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}. \quad (1)$$

Wanneer aangenomen wordt, dat reeds is aangesloten aan de punten $A_1$ en $A_2$, worden $\triangle z_1$ en $\triangle z_2$ nul en geschiedt de aansluiting aan $A_3$ volgens de formule:

$$\triangle z_p = \triangle z_3 \frac{(z_p - z_1)(z_p - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}. \quad (2)$$

Uit de theorie der complexe getallen, waarvan de arithmetische bewerkingen bekend worden ondersteld, volgen o.a. de regelen:

**Eigenschappen van complexe getallen**

*a.* Het *product* van twee complexe getallen is een complex getal, waarvan de modulus is het *product* van de moduli der factoren en het argument de *som* van de argumenten der factoren.

*b.* Het *quotient* van twee complexe getallen is een complex getal, waarvan de modulus is het *quotient* der moduli en het argument het *verschil* der argumenten van *deeler* en *deeltal*.

Onder toepassing van deze regelen vinden wij voor den modulus van $\triangle z_p$:

$$c_p = c_3 \frac{m_{1.p} \cdot m_{2.p}}{m_{1.3} \cdot m_{2.3}} \quad (3)$$

en voor het argument:

$$\gamma_p = \gamma_3 + \varphi_{1.p} + \varphi_{2.p} - \varphi_{1.3} - \varphi_{2.3}. \quad (4)$$

In deze uitdrukkingen zijn respectievelijk:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_{1.3}$ | en $\varphi_{1.3}$ | modulus | en | argument | van | $z_3 - z_1$ |
| $m_{2.3}$ | „ $\varphi_{2.3}$ | „ | „ | „ | „ | $z_3 - z_2$ |
| $m_{1.p}$ | „ $\varphi_{1.p}$ | „ | „ | „ | „ | $z_p - z_1$ |
| $m_{2.p}$ | „ $\varphi_{2.p}$ | „ | „ | „ | „ | $z_p - z_2$ |
| $c_3$ | „ $\gamma_3$ | „ | „ | „ | „ | $\triangle z_3$ |
| $c_p$ | „ $\gamma_p$ | „ | „ | „ | „ | $\triangle z_p$. |

In (3) is $a = \frac{c_3}{m_{1.3} \cdot m_{2.3}}$ een constante. Hare waarde kan worden bepaald, doordat $c_3$ bekend is en $m_{1.3}$ en $m_{2.3}$ met voldoende nauwkeurigheid kunnen worden uitgepast van een op schaal geteekende kaart. Is $a$ vastgesteld, dan wordt $c_p$ gevonden uit:

$$c_p = a \cdot m_{1.p} \cdot m_{2.p}. \quad (5)$$

$\gamma_3 - \varphi_{1.3} - \varphi_{2.3} = \varphi_\alpha$ is eveneens een constante voor de transformatie, zoodat wanneer de waarde van $\varphi_\alpha$ is vastgesteld, voor $\gamma_p$ geldt:

$$\gamma_p = \varphi_\alpha + \varphi_{1.p} + \varphi_{2.p}. \tag{6}$$

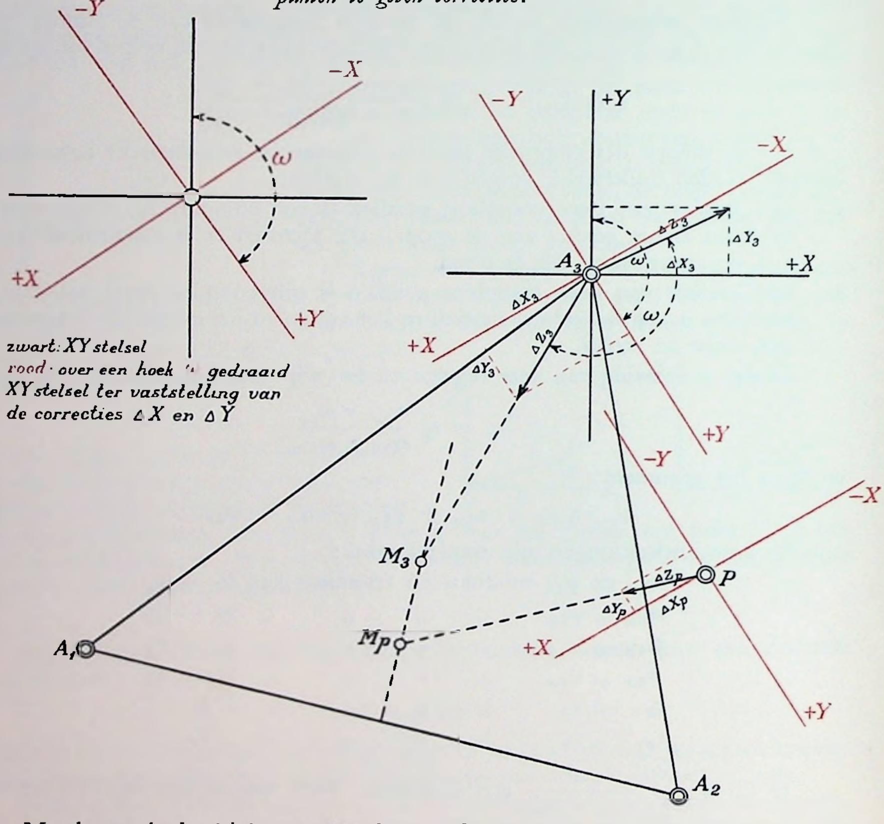
**Berekening der correcties**

De berekening van $c_p$ uit (5) geschiedt het eenvoudigst door vermenigvuldiging van de vastgestelde waarde van $a$ met de op een kaarteering op schaal uitgepaste afstanden $m_{1.p}$ en $m_{2.p}$. Voor de bepaling van $\gamma_p$ uit (6) kan men eveneens onder gebruikmaking van een gradenboog $\varphi_{1.p}$ en $\varphi_{2.p}$ uitpassen en optellen bij de constante $\varphi_\alpha$.

In onderstaande figuur is de te volgen grafische constructie voorgesteld.

CONFORME AANSLUITING AAN DRIE PUNTEN

*Grafische bepaling van de aan de coördinaten der aan te sluiten punten te geven correcties.*




Men kan ook de *richting* van $\Delta z_p$ *langs grafischen weg* vaststellen onder toepassing van het volgende.

Aangetoond kan worden, dat als $M_3$ het middelpunt is van den omschreven cirkel van den aansluitingsdriehoek $A_1$ $A_2$ $A_3$ en $M_p$ het middelpunt van den

omgeschreven cirkel van den driehoek $A_1A_2P$, de hoek in $A_3$ tusschen de richting van $\triangle z_3$ en die van de lijn $A_3M_3$, welken hoek wij $\omega$ noemen, *gelijk* is aan den hoek tusschen de richtingen $\triangle z_p$ en $P\ M_p$.

De hoek $\omega$ is dus een *constante* voor de *conforme aansluiting*.

Men kaarteert nu het driehoeksnet op een passende schaal, en zet met behulp van de gegeven coördinatenverschillen voor het derde aansluitingspunt $A_3$ op een zeer groote schaal 1 à 10 (of nog grooter) $\triangle z_3$ uit en bepaalt den hoek $\omega$, de *constante*. Door gebruikmaking van deze constante kan dus voor elk punt de *richting* van de correctie in de kaart worden aangegeven.

**Bepaling van de correcties langs grafischen weg**

Heeft men deze richting geconstrueerd, dan zet men met behulp van de berekende modulus $c_p$ den vector $\triangle z_p$ uit. Ontbinding van den vector in de richting van de coördinatenassen $X$ en $Y$ levert dan onmiddellijk voor $P$ en op analoge wijze voor de overige aan te sluiten punten, de correcties $\triangle X$ en $\triangle Y$.

Men kan de grafische constructie nog iets vereenvoudigen door het assenstelsel over een hoek $\omega$ te draaien. Dit komt in de practijk hierop neer, dat men $\triangle z_p$ met de daarvoor gevonden grootte $c_p$ uitzet van uit $P$ in de richting $M_p$ en vervolgens ontbindt ten opzichte van een nieuw assenstelsel in de kaart aan te brengen, welk assenstelsel een hoek $\omega$ maakt met het $X$, $Y$ stelsel van het driehoeksnet.

**Vereenvoudiging der grafische constructie**

Op deze wijze wordt het telkens construeeren van den hoek vermeden.

## § 16. VERGELIJKENDE BESCHOUWINGEN OVER DE AANSLUITINGSMETHODEN

Een vergelijking tusschen de hiervoor behandelde *affine* en *conforme* aansluiting valt, zooals in den aanvang van § 15 reeds met een enkel woord werd vermeld, ten voordeele van de conforme methode uit, zoodra het net van kleine driehoeken aan niet meer dan drie bekende punten wordt verbonden.

Bij de *conforme* aansluiting zijn de figuren in de kleinste deelen gelijkvormig; bovendien levert zij kleine correcties op voor de hoeken, terwijl de hoeken van kleine driehoeken geringer verandering ondergaan dan die van grootere. Rechte lijnen blijven evenwel bij de vervorming geen rechte lijnen.

Deze methode van aansluiting aan drie punten levert bezwaren op, wanneer zij wordt toegepast bij twee met een zijde aan elkander grenzende driehoeken; nabij de grens van de gemeenschappelijke zijde treedt een *discontinuiteit* op, welke zich kenteekent doordat de punten, in het grensgebied voorkomende, verschillende correcties zullen verkrijgen, al naar gelang men deze punten aansluit aan het eene of aan het andere drietal punten.

**Vergelijking tusschen de conforme en de affine aansluiting**

De *affine* aansluiting levert in het algemeen grootere hoekcorrecties dan de conforme; zij geeft dus grootere verwringing van het net. Rechte lijnen blijven evenwel recht en de bovengemelde discontinuiteit treedt hier niet op. De affine methode leent zich daarom zeer goed voor een driehoeksgewijze aansluiting van de secundaire punten; zij kan worden uitgebreid tot een aansluiting aan een grooter aantal primaire punten onder toepassing van de methode der kleinste kwadraten.

Een vergelijking tusschen de *overbepaalde* gelijkvormigheidstransformatie en de *overbepaalde* affine is minder eenvoudig, omdat zij berusten op transformaties met een verschillend aantal aansluitingspunten. Men kan tot een vergelijking komen door het tegen elkaar afwegen van de nauwkeurigheid van de coördinaten der punten in beide stelsels.

Vergelijking tusschen de overbepaalde affine en de overbepaalde gelijkvormigheidstransformatie

Staat de nauwkeurigheid van de secundaire uitkomsten ten achter bij de primaire, dan zal door toepassing van de affine aansluiting een grootere corrigeerende werking van het primaire net worden bereikt, omdat deze werking door middel van *drie* punten op het secundaire net wordt overgebracht en dus door de daarbij optredende *zes* constanten een ruimere mate van vervorming mogelijk is. De affine methode is soepeler dan de gelijkvormigheidstransformatie.

Indien evenwel de secundaire metingen met groote nauwkeurigheid zijn uitgevoerd en het omgekeerde van het hierboven gestelde verwacht mag worden, dan verdient de gelijkvormigheidstransformatie aanbeveling. Men zal dan de goede kwaliteiten van het secundaire net behouden door het aan geen vervorming bloot te stellen en laatstgenoemde aansluitingsmethode kiezen, waarbij alleen de oriënteering en de schaal door middel van de aansluiting worden bepaald.

In het normale geval, waarin dus beide netten aan de gebruikelijke nauwkeurigheidseischen voldoen, verdient de affine methode de voorkeur. Blijkt uit de berekening, dat ongeveer $a_1 = b_2$ en $a_2 = -b_1$, dan wijst dit op een geringe vervorming en krijgen de formules het karakter van die der gelijkvormigheidstransformatie. In het algemeen geven eerst deze resultaten het inzicht of en in welke mate het eene net ten opzichte van het andere verwrongen is; dit inzicht is dus te verkrijgen door toepassing van de affine methode.

In deze handleiding zijn met opzet geen formules gegeven met meer dan zes graden van vrijheid. Dit is eensdeels geschied, omdat bij opvoering van dit aantal de berekeningen belangrijk gecompliceerder worden, anderdeels omdat een maximum aantal vrijheidsgraden geenszins gewenscht is, dit allerminst als een ideale oplossing behoeft te worden beschouwd.

Wanneer $n$ aansluitingspunten aanwezig zijn, zou een *volkomen* aansluiting verkregen worden door toepassing van formules met 2 $n$ constanten. Een dergelijke aansluiting verdient geen aanbeveling, omdat door de waarnemingsfouten, voorkomende zoowel in het primaire als in het secundaire net de aansluitingspunten niet absoluut nauwkeurig kunnen zijn. Bij het gebruik maken van minder aansluitingspunten mogen daarom zonder vrees voor mindere nauwkeurigheid eenige overblijvende verschillen worden getolereerd. In geen geval kan als vast worden aanvaard, dat door *absolute* aansluiting de ligging der punten na de aansluiting, ten opzichte van het primaire net *nauwkeuriger* zal worden dan bij een aansluiting met minder graden van vrijheid, gecombineerd met een vereffening.

Ten slotte is een vergelijking tusschen de voordeelen van afzonderlijke puntsbepaling en het gebruik van een driehoeksnet hier op haar plaats.

Vergelijking van de methoden der afzonderlijke puntsbepaling met aansluiting van een driehoeksnet.

Een driehoeksnet geeft het voordeel, dat het een aantal onderling gunstig gelegen punten levert van ongeveer gelijke nauwkeurigheid, dit laatste bij een niet ongunstigen vorm der driehoeken. Men verkrijgt aldus een homogeen resultaat; de methode is verder een zeer zuiver voorbeeld van het werken van het groote in het kleine. Bovendien geeft zij het voordeel van contrôle op de gegeven primaire coördinaten der aansluitingspunten; deze contrôle, die plaats kan vinden, vóór tot de aansluiting wordt overgegaan, maakt een doelmatige keuze der aansluitingspunten mogelijk en verhindert het insluipen van fouten, tengevolge van storingen in de ligging van de gegeven punten. Deze blijven toch bij de methode van afzonderlijke puntsbepaling veelal ongecontroleerd, zijn zelfs menigmaal oncontroleerbaar.

Laatstgenoemde methode heeft echter ongetwijfeld het voordeel van grootere aanpassingsmogelijkheid aan het terrein, terwijl daarbij in het algemeen geen

punten zichtbaar behoeven te worden gemaakt, hetwelk bij een driehoeksnet vaak groote moeilijkheden kan opleveren.

In het algemeen is het voor het verkrijgen van goede resultaten een vereischte, dat men zich in voorkomende gevallen vooraf een goed inzicht vormt van de relatieve bruikbaarheid en de eventueele voordeelen van beide te bezigen werkmethoden.

## § 17. VEELHOEKSMETING

Nadat de driehoekspunten zijn vastgesteld, wordt zooals reeds in § 2 werd aangegeven, de eerste verdichting van den meetkundigen grondslag verkregen door de veelhoeksmeting. De aansluiting van de veelhoekspunten aan de driehoekspunten geschiedt als regel door middel van open veelhoeken, die van een driehoekspunt uitgaan en in een ander eindigen.

Behalve in het zeer bijzondere geval, dat een geheel op zich zelf staand veelhoeksnet als meetkundige grondslag gebezigd wordt, zal in het algemeen de veelhoeksmeting de schakel vormen tusschen de driehoeksmeting en de detailmeting. In terreinen van eenige uitgebreidheid is het daarbij aan te bevelen de veelhoeksmeting in twee min of meer gescheiden onderdeelen te splitsen, n.l. in hoofd- en secundaire veelhoeken.

**Schakel tusschen driehoeks- en detailmeting**

Met de meting van hoofdveelhoeken wordt meer uitsluitend beoogd een verdichting van het net van *vaste punten* te verkrijgen; de secundaire veelhoeken, meestal bestaande uit korte veelhoeken met kleinere zijden dienen dan meer direct als hulpmiddel ten behoeve van de detailmeting.

*Hoofdveelhoeken.* Wanneer het op te meten terrein zich minder goed leent voor het bepalen van punten langs den weg der afzonderlijke puntsbepaling, zoodat een voldoend aantal vaste punten bezwaarlijk is te verkrijgen, kan door de meting van hoofdveelhoeken een deel van de taak der puntsbepaling worden overgenomen. Hierbij zal men bij de keuze der veelhoekszijden geen rekening houden met hunne geschiktheid als meetlijnen voor de detailmeting, maar zal men speciaal de volgende eischen stellen:

**Hoofdveelhoeken**

**Eischen voor den Hoofdveelhoek**

1°. de vorm van den veelhoek moet zooveel mogelijk gestrekt zijn;

2°. de bepaling van de lengten der veelhoekszijden moet nauwkeurig zijn uit te voeren;

3°. de zijden van den veelhoek moeten nagenoeg van gelijke lengte zijn en niet te groot in aantal.

**Secundaire veelhoeken**

*Secundaire veelhoeken.* In tegenstelling met de hoofdveelhoeken zal men bij de secundaire rekening houden met den eisch, dat de veelhoekszijden practische bruikbaarheid moeten hebben voor de detailmeting, hetzij dat zij direct als meetlijnen te bezigen zijn, hetzij dat zij op weinig omslachtige wijze kunnen dienen voor de aansluiting van de meetlijnen aan den meetkundigen grondslag.

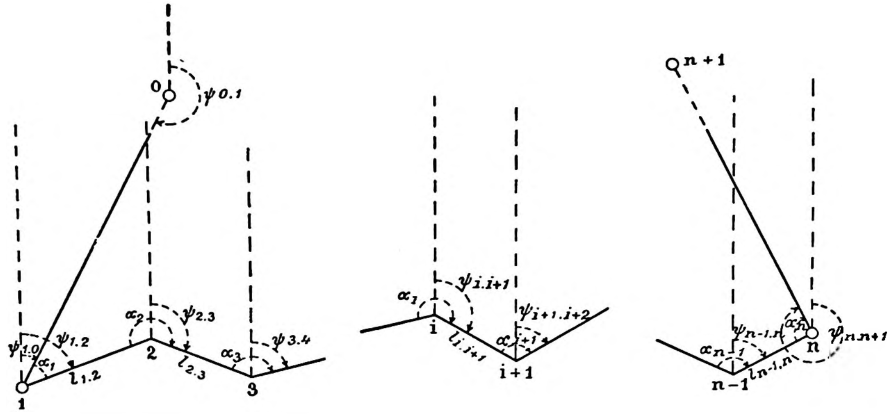
**Gebroken meetlijn**

In dicht bebouwde stadskommen en ook in bosschen, waar het niet mogelijk is een behoorlijk net van rechte meetlijnen aan te leggen, zal de secundaire veelhoek zeer sterk het karakter van *gebroken meetlijn* verkrijgen.

Door de onderscheiding van hoofdveelhoeken en secundaire veelhoeken wordt in het algemeen tevens doorgevoerd het bij puntsbepaling zoo nuttige beginsel van het werken van het groote in het kleine. Het verdient daarom aanbeveling, ook al dwingt de gesteldheid van het terrein niet direct daartoe, om reeds onmiddellijk

bij het leggen van den meetkundigen grondslag met deze onderscheiding rekening te houden ten einde mogelijke opstapeling van onnauwkeurigheden te ontgaan.

Onderstaande figuur geeft een voorstelling van een veelhoek.



De in de figuur gebezigde *notatie* is als volgt:

1, 2, 3 ......... $i$, $i + 1$, ......... $n - 1$, $n$ : nummers der veelhoekspunten;

1 en $n$ : eindpunten van den veelhoek;

$o$ en $n + 1$ : punten ter bepaling der aansluitingsrichtingen;

$\alpha_1$, $\alpha_2$, ......... $\alpha_i$, ......... $\alpha_{n-1}$, $\alpha_n$ : gemeten hoeken van den veelhoek, gedefiniëerd op deze wijze : $\alpha_i$ = gemeten richting in $i$ naar $i + 1$, verminderd met gemeten richting in $i$ naar $i - 1$;

$\varphi_{1,2}$, $\varphi_{2,3}$......... $\varphi_{i,\,i+1}$......... $\varphi_{n-1,n}$ : argumenten der veelhoekszijden;

$\varphi_{o,1}$ en $\varphi_{n,\,n+1}$ : argumenten der aansluitingsrichtingen;

$l_{1,2}$, $l_{2,3}$, ......... $l_{i,\,i+1}$...... $l_{n-1,n}$ : gemeten lengten der veelhoekszijden.

Bij de veelhoeksmeting moeten als voornaamste fouten worden gerekend:

**Fouten-bronnen**

*a.* de fouten in de hoekmeting;

*b.* de fouten in de centreering, zoowel van de opstelling van het instrument als van de signalen;

*c.* de toevallige fouten in de lengtemeting;

*d.* de systematische fout in de lengtemeting, gevolg van een fout in de lengte van het gebezigde instrument (meetband);

*e.* de fouten in de coördinaten van de eindpunten van den veelhoek;

*f.* de fouten in de aansluitingsrichtingen van den veelhoek, als gevolg van de fouten in de coördinaten der aansluitingspunten.

**Dwang-centreering**

De fouten in de centreering van signalen en opstelling kunnen worden opgeheven door toepassing van de dwangcentreering. Dit vereischt evenwel een uitgebreid aantal hulpmiddelen (driepooten, Freiberger opstellingen enz.), waarvan het meevoeren in de practijk wel eens groote bezwaren geeft.

De centreerfouten kunnen evenwel ook zonder dwangcentreering voor een groot deel worden vermeden door toepassing van optische centreering; gebruikmaking van dit middel moet dan ook worden aanbevolen; het is daarbij een vereischte, dat er in het bijzonder voor gezorgd wordt, dat de identiteit van plaats van opstelling van instrument en signaal verzekerd is; met aanwending van eenvoudige middelen kan men meestal uitstekende resultaten verkrijgen.

**Optische centreering**

Dat een groote zorgvuldigheid bij de centreering geboden is, moge blijken uit den invloed van de centreerfout op de uitkomsten. Noemt men $c$ het bedrag van deze fout in opstelling van signalen en instrument, dan is de middelbare fout in een gestrekten hoek:

**Invloed van centreerfout**

$$m_c = \rho^{cc} \frac{c}{l} \sqrt{6}$$

waarin $l$ de lengte van een been van den hoek voorstelt. Voor $c = 2{,}5$ mm en $l = 200$ m wordt $m_c$ ongeveer $20^{cc}$, een bedrag dat in vergelijking met de m.f. van een normaal uitgevoerde hoekmeting, zeer belangrijk te noemen is. De eerste voorzorg bij de veelhoeksmeting zal dus zijn het zooveel mogelijk vermijden van centreerfouten.

In de practijk zullen als regel instrument en signalen voor elke hoekmeting opnieuw worden gecentreerd. Daardoor krijgen de centreerfouten een *toevallig* karakter. Voor de totale middelbare fout $\overline{m}_\alpha$ in een hoek van den veelhoek zal men dan vinden:

$$\overline{m}_\alpha^2 = m_\alpha^2 + m_c^2$$

waarin $m_\alpha$ de m.f. in de hoekmeting en $m_c$ de m.f. in de centreering. Bij dwangcentreering mag $m_c$ nul worden genomen.

Fouten in de lengtemeting worden in hoofdzaak veroorzaakt door de temperatuur. Voor een belangrijk deel uit deze zich als *systematische* fout; men moet er tegen waken, dat zij zich op grillige wijze laat gelden, hetgeen het geval zal zijn, indien de lengtemeting geschiedt deels over een door de zon sterk verwarmden weg, waarbij de stalen meetband een abnormaal hooge temperatuur kan verkrijgen, deels over een met gras begroeid terreingedeelte. Deze zoo ongelijk werkende omstandigheden veroorzaken storende onnauwkeurigheden, die alleen vermeden kunnen worden, wanneer er voor gezorgd wordt de lengtemeting niet onder ongelijke omstandigheden uit te voeren, maar ze te verrichten bij bedekten hemel.

**Systematische fouten in de lengtemeting**

Ook bij metingen over een glooiend terrein, een weg b.v. met sterke begroeiing aan weerskanten, waarbij moeilijk een correctie voor de helling is vast te stellen, treedt een systematische fout in de lengtemeting op, terwijl ook de vergrooting in de kaartprojectie een dergelijke fout doet ontstaan.

Bij een gestrekten veelhoek zijn systematische fouten, indien zij regelmatig zijn, onschadelijk, daar zij bij de aansluiting aan de driehoekspunten, die het begin- en het eindpunt van den veelhoek vormen, door de vereffening verdwijnen. Niettemin verdient het aanbeveling om de bij de meting optredende systematische fouten ook bij gestrekte veelhoeken onmiddellijk zoo goed mogelijk te corrigeeren, waardoor men een beter inzicht verkrijgt in de grootte van andere fouten, welke anders door den overwegenden invloed der systematische, kans loopen in de sluitfouten van den veelhoek te worden verstikt.

**Corrigeeren van systematische fouten in de lengtemeting**

Men zal dus de gemeten lengten der veelhoekszijden, alvorens tot de vereffening van den veelhoek over te gaan, corrigeeren voor de temperatuur, zoo noodig voor de helling en voor de vergrooting in de kaart.

De onder *f* vermelde fouten in de aansluitingsrichtingen, welke worden veroorzaakt door onnauwkeurigheden in de coördinaten, zoowel van de eindpunten van den veelhoek, als in die der aansluitingspunten, kunnen voor een deel onschadelijk worden gemaakt, wanneer men laatstgenoemde punten op zeer grooten afstand kan nemen. Blijkt dit niet uitvoerbaar, dan zal men trachten de aansluitingspunten zoo te kiezen, dat in elk der eindpunten van den veelhoek de aansluitingsrichting slechts weinig afwijkt van de richting naar het andere eindpunt.

**Keuze der aansluitingsrichtingen**

De fouten sub *e* zijn natuurlijk niet te ontgaan; zij hebben een directen invloed op de nauwkeurigheid, waarmede de coördinaten der veelhoekspunten worden bepaald. De invloed dezer fouten is het geringst bij gestrekte veelhoeken; ook om deze reden is het gebruik van dit soort veelhoeken aan te bevelen.

Ten slotte moet nog worden opgemerkt, dat het raadzaam is de veelhoeksmeting als een *afzonderlijk geheel* te beschouwen en haar geheel ten uitvoer te brengen onder zoo mogelijk dezelfde omstandigheden. In dit verband verdient dan ook geen aanbeveling de toepassing van een dikwijls gevolgde werkwijze, om bij aansluiting van een veelhoek op een Snelliuspunt de richting van de aansluitende veelhoekszijde mede op te nemen in de serie van de richtingen naar de driehoekspunten, vooral niet als de hoeken van den veelhoek op andere dagen worden gemeten. Het is altijd beter den veelhoek als afzonderlijk object te behandelen en voor haar aansluiting te kiezen een richting naar een ver verwijderd R. D.-punt, al heeft dit laatste niet gediend voor de berekening van het bedoelde Snelliuspunt.

**Strenge vereffening**

Wanneer men er toe zou willen overgaan om een veelhoek streng te vereffenen volgens de methode der kleinste kwadraten, dan is het noodig eenige vereenvoudige onderstellingen in te voeren, die de oplossingen van het vraagstuk vergemakkelijken.

De eerste is, dat men de aansluitingsrichtingen als foutloos beschouwt; de tweede is, dat de aansluitingspunten eveneens als foutloos worden aanvaard. Deze laatste onderstelling zal de vereffeningsmethode volgens de kleinste kwadraten niet aantasten, wanneer men op de wijze als door G. Förstner [1]) wordt aangegeven, een onbekende invoert voor de lengte van den meetband, waardoor het aantal overtollige waarnemingen tot 2 daalt. Dit geldt evenwel alleen voor een enkelvoudigen veelhoek; zoodra er n.l. voor de vereffening van polygoonmetingen meer dan twee gegeven punten optreden, vervalt het voordeel van de methode-Förstner.

Een derde onderstelling is, dat de gemeten hoeken alle even nauwkeurig zijn. Met het oog op de centreerfouten is dit alleen dan juist, als de beenen van den hoek nagenoeg van gelijke lengte zijn; dit is in het algemeen bij het begin- en eindpunt van den veelhoek niet het geval. Omdat een strenge vereffening alleen loonend is, wanneer bij de meting groote zorgvuldigheid in acht is genomen, kan men aannemen, dat dwangcentreering is toegepast. Dan vervallen de centreerfouten en kan aan alle hoeken van den veelhoek een zelfde gewicht worden toegekend.

Thans kan de methode der kleinste kwadraten worden toegepast, hetgeen echter in het algemeen genomen weinig practisch is, mede met het oog op de vrij omslachtige berekeningen, waartoe deze werkwijze aanleiding geeft. [2])

In deze handleiding wordt volstaan met het aangeven van een benaderingsmethode.

Voor nauwkeurigheidsbeschouwingen zie men § 21.

---

[1]) G. Förstner, Ausgleichung von Polygonzügen, Zeitschr. f. Verm. wesen 1933, blz. 49.

[2]) Voor literatuur zie bv.: Dieperink, Strenge vereffening van veelhoeksmetingen, Tijdschr. voor Kad- en Landmeetkunde, jg. 1931 blz. 76.

De volgende benaderingsmethode wordt aanbevolen.

De gemeten hoeken en zijden van den veelhoek moeten voldoen aan de navolgende voorwaarden:

**Benaderde methode voor berekening van den veelhoek**

1°. door optelling van de gemeten hoeken $\alpha$ bij de aansluitingsrichting $\psi_{0,1}$ wordt op een veelvoud van $200^g$ na de aansluitingsrichting $\psi_{n,\,n+1}$ verkregen;

2°. de algebraische som der onderscheiden abscissen-verschillen van de veelhoekspunten moet gelijk zijn aan het abscissenverschil der aansluitingspunten $n$ en 1;

3°. evenzoo moet de algebraische som der ordinatenverschillen der veelhoekspunten gelijk zijn aan het ordinatenverschil der aansluitingspunten $n$ en 1.

Het verschil $f_\alpha$, dat door toepassing van de 1e voorwaarde wordt opgeleverd. wordt *gelijkelijk* over de hoeken verdeeld. Elke hoek ontvangt dan een correctie gelijk aan het $n$-de deel van de optredende sluitfout. Hierna worden de argumenten $\psi$ der zijden vastgesteld door de algemeene formule:

$$\psi_{i+1,\,i+2} = \psi_{i,\,i+1} + \alpha_{i+1} + \frac{f_\alpha}{n} \pm 200^g.$$

Met behulp van de aldus gecorrigeerde argumenten en de zoo noodig voor meetband, temperatuur, kaartprojectie, helling gecorrigeerde lengten worden de coördinatenverschillen verkregen uit de betrekkingen:

$$X_{i+1} - X_i = l_{i,\,i+1} \sin \psi_{i,\,i+1}$$

en:

$$Y_{i+1} - Y_i = l_{i,\,i+1} \cos \psi_{i+1}$$

De toetsing aan de 2e en 3e voorwaarde geschiedt nu, door de algebraische sommen der abscissen- en ordinatenverschillen $[l_{i,\,i+1} \sin \psi_{i,\,i+1}]$ en $[l_{i,\,i+1} \cos \psi_{i,\,i+1}]$ te vergelijken met de gegeven bedragen $X_n - X_1$ en $Y_n - Y_1$. De daarbij optredende verschillen $f_x$ en $f_y$ worden over de abscissen- resp. de ordinatenverschillen verdeeld *evenredig aan de lengten der zijden*. De verschillen $X_{i+1} - X_i$ en $Y_{i+1} - Y_i$ worden dus gecorrigeerd met

$$\frac{l_{i,\,i+1}}{[l]} f_x \text{ en } \frac{l_{i,\,i+1}}{[l]} f_y$$

waarna de coördinaten der veelhoekspunten kunnen worden vastgesteld.

Contrôle op de berekening van de coördinaten der veelhoekspunten kan worden verkregen, door deze eveneens uit te voeren in het getransformeerde stelsel, behandeld in § 5 bij de bespreking van formulier n°. 12.

**Contrôle-berekening**

De argumenten in dit stelsel werden voorgesteld door $\overline{\psi} = \psi - 50^g$, waarmede correspondeeren de coördinaten $\overline{X} = X - Y$ en $\overline{Y} = X + Y$. De afstanden in het getransformeerde stelsel aanduidende als $\overline{l}$, wordt gevonden:

$$\overline{l}^2 = \overline{X}^2 + \overline{Y}^2 = 2\,(X^2 + Y^2) = 2\,l^2$$

zoodat:

$$\overline{l} = l \sqrt{2}.$$

De afstanden $l$ moeten derhalve met $\sqrt{2}$ worden vermenigvuldigd om ze te herleiden tot afstanden in het getransformeerde stelsel.

Voor de contrôle is het voldoende om de berekening uitsluitend uit te voeren voor de abscissen of uitsluitend voor de ordinaten, hetgeen kan geschieden in een afzonderlijk ten behoeve van de contrôle aan te leggen polygoonformulier.

Het polygoonformulier n°. 24 is geschikt zoowel voor logarithmische berekening als voor berekening met de rekenmachine. Bezigt men de machine, dan wordt de volgende werkwijze aanbevolen.

Men plaatst de waarde van $X_1$ in het resultaatregister (Rr), zoodanig, dat de komma komt te staan tusschen de 9e en 10e plaats. Bij een negatieve $X_1$ wordt het arithmetrisch complement genomen.

**Werkwijze bij gebruikmaking van de rekenmachine**

In het instelregister (Ir) wordt gesteld sin $\varphi_{1,2}$ met de komma tusschen de 6e en 7e plaats. Het omdraaiingsregister (Or) is schoon. Bij gebruik van de Marchant-machine plaatst men den teekenhefboom (Th) op $\times$, als sin $\varphi_{1,2}$ positief en op $\div$, als deze grootheid negatief is. Men voert nu een zoodanig aantal omdraaiingen uit, dat het omdraaiingsregister $l_{1,2}$ aanwijst (komma tusschen 3e en 4e plaats). In Ir plaatst men vervolgens sin $\varphi_{2,3}$ en stelt weer Th overeenkomstig het teeken van sin $\varphi_{2,3}$.

De getallen in Or en Rr blijven staan en men draait $l_{2,3}$ malen bij. Deze bewerking herhalende, *zonder de tusschenresultaten te noteeren* vindt men ten slotte:

in het resultaatregister: $X_1 + [l \sin \varphi]$

in het omdraaiingsregister: $[l]$

Thans wordt Ir schoongemaakt en in dit register gesteld $[l]$; men zet Th op $\times$, maakt Or schoon en plaatst de komma tusschen de 6e en 7e plaats. Men draait vervolgens een zoodanig aantal slagen, dat Rr zoo na mogelijk $X_n$ aanwijst. Men heeft daarmede $X_1 + [l \sin \varphi]$, welke waarde in Rr voorkwam, vermeerderd met $f_x$. In Or staat dus $f_x : [l]$ met het juiste teeken, d.w.z. als dit bedrag negatief is vindt men het arithmetisch complement aangegeven.

Aan de grootheden $X_{i+1} - X_i$ moet vervolgens de correctie $\triangle X_{i,i+1} = l_{i,i+1} \frac{f_x}{[l]}$ worden aangebracht. Nu is: $X_{i+1} - X_i = l_{i,i+1} \sin \varphi_{i,i+1}$; na correctie is: $X_{i+1} - X_i + \triangle X_{i,i+1} = l_{i,i+1} \left(\sin \varphi_{i,i+1} + \frac{f_x}{[l]}\right)$.

In het formulier corrigeert men alle grootheden sin $\varphi_{i,i+1}$ met het constante bedrag $\frac{f_x}{[l]}$.

Op de volgende wijze worden nu in de rekenmachine de resultaten verkregen. Men maakt Or en Ir schoon, plaatst de komma's respectievelijk weer tusschen de 3e en 4e en tusschen de 6e en 7e plaats, doch laat in Rr, het daar verkregen getal, hetwelk zoo na mogelijk $X_n$ aanwijst, staan. In Ir wordt nu geplaatst sin $\varphi_{n-1,n} + \frac{f_x}{[l]}$ en stelt men Th overeenkomstig het tegengesteld teeken van het in het instelregister staande getal. Men draait nu zoo, dat in Or het bedrag $l_{n-1,n}$ wordt aangegeven. In Rr komt daardoor $X_{n-1}$ te voorschijn, welk getal in het formulier-Veelhoeksmeting wordt te boek gesteld. Op analoge wijze vindt men daar achtereenvolgens $X_{n-2}$, $X_{n-3}$ enz., tot eindelijk precies $X_1$ weer in het resultaatregister te voorschijn treedt.

Bij de Brunsviga-rekenmachine met negatiefknop (13Z/18) is een analoge werkwijze mogelijk.

De ordinaten der veelhoekspunten worden geheel op dezelfde wijze verkregen.

Op deze wijze te werk gaande vermijdt men in de berekening alle afrondingsfouten en bereikt men een maximum aan nuttig effect van de rekenmachine. Men lette er evenwel op, dat bij de aflezing der resultaten en het boeken van deze in het formulier, geen vergissingen mogen worden gemaakt, aangezien hierop geen directe contrôle bestaat.

Zijn in de elementen (hoeken en zijden) van een veelhoek op de een of andere wijze grove fouten of vergissingen geslopen, zoo kunnen deze als volgt worden opgespoord.

**Opsporen van een abnormale hoekfout**

Een groote hoekfout openbaart zich onmiddellijk bij het toetsen op de hoekvoorwaarde. Ter opsporing van het veelhoekspunt, waar de hoekfout is gemaakt, berekent men den veelhoek heen en terug. Het ligt voor de hand, dat het foutieve veelhoekspunt in beide gevallen ongeveer dezelfde coördinaten zal opleveren.

Men kan ook den veelhoek geheel doorrekenen. In plaats van ongeveer op de bekende coördinaten $X_n$ en $Y_n$ van het eindpunt te sluiten, zal men daarvoor foutieve coördinaten $X_n'$ en $Y_n'$ berekenen. De coördinaten $X_i$ en $Y_i$ van het veelhoekspunt, waar de fout is gemaakt, vindt men dan door toepassing van de formules van Brönnimann uit:

**Regel van Brönnimann**

$$X_i = \frac{X_n + X_n'}{2} - \frac{Y_n - Y_n'}{2} \cot \tfrac{1}{2}\,\delta$$

$$Y_i = \frac{Y_n + Y_n'}{2} - \frac{X_n - X_n'}{2} \cot \tfrac{1}{2}\,\delta$$

waarin $\delta$ de geconstateerde hoekfout voorstelt.

**Abnormale fout in de lengterichting**

Een abnormale afwijking in de lengte van een der zijden verschuift den veelhoek in de richting van de foutieve zijde over een afstand, gelijk aan de afwijking. Bij de berekening van den veelhoek zal men dus in het eindpunt $n$ constateeren twee grove afwijkingen van de coördinaten n.l. $F_x$ en $F_y$. De lengte van de afwijking zal dan zijn:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

en de richting:

$$\text{tg}\ \varphi = F_x : F_y$$

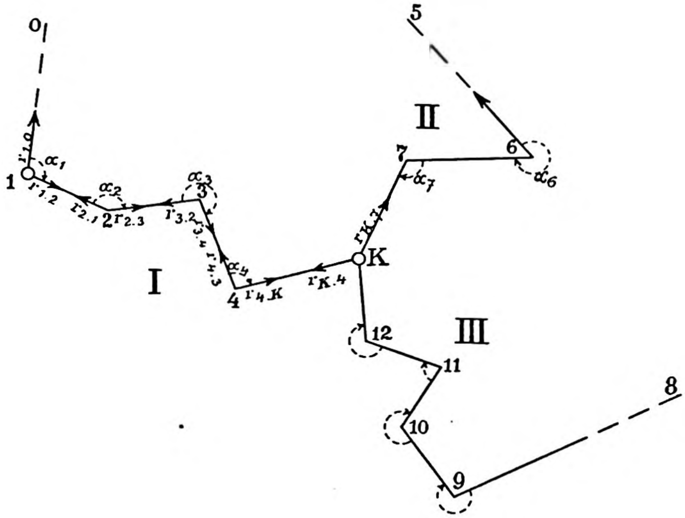
De hieruit te berekenen waarde van $\varphi$ zal nagenoeg overeenstemmen met het argument van de veelhoekszijde, waarin de fout in de lengte schuilt. Naarmate de argumenten der veelhoekszijden onderling meer verschillen, zal de fout in de lengtemeting met grooter zekerheid kunnen worden opgespoord,

De methode zal evenwel bij een gestrekten veelhoek, die weinig van de rechte lijn afwijkt, weinig of geen practisch resultaat opleveren.

Wanneer drie (of meer) veelhoeken, respectievelijk uitgaande van reeds bekende punten, in een zelfde punt samentreffen, wordt dit gemeenschappelijk punt *knooppunt* genoemd.

**Knooppunt**

De in het knooppunt gemeten richtingen zijn in één serie opgenomen. Voor de vaststelling van de *argumenten* dezer richtingen, moet de serie worden geöriënteerd met een voorloopig onbekende waarde $\mathfrak{z}$, welke als volgt zal worden berekend.




Uitgaande van de aansluitingsrichtingen 0.1, 5.6 en 8.9 (zie de figuur) kunnen respectievelijk uit de veelhoekstakken I, II en III de volgende waarden worden afgeleid.

Uit den veelhoek I wordt gevonden:

$$\mathfrak{z}_I + r_{k4} = \psi_{0,1} - r_{1,0} + r_{1,2} - r_{2,1} + r_{2,3} - r_{3,2} + r_{3,4} - r_{4,3} + r_{4,k} + p_I \quad 200^g$$

zoodat:

$$\mathfrak{z}_I = \psi_{0,1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - r_{k,4} + p_I \quad 200^g$$

evenzoo:

$$\mathfrak{z}_{II} = \psi_{5,6} + \alpha_6 + \alpha_7 - r_{k,7} + p_{II} \quad 200^g$$

en:

$$\mathfrak{z}_{III} = \psi_{8,9} + \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} - r_{k,12} + p_{III} \quad 200^g.$$

Uit deze 3 waarden wordt een eindwaarde berekend volgens de formule:

$$\mathfrak{z} = \frac{g_1 \mathfrak{z}_I + g_2 \mathfrak{z}_{II} + g_3 \mathfrak{z}_{III}}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Voor de in deze formule optredende gewichten worden getallen genomen, die *omgekeerd evenredig* zijn met het aantal gemeten richtingen, waaruit elk der waarden is samengesteld. In het voorbeeld zijn deze dus:

$$g_1 = \frac{1}{9};\ g_2 = \frac{1}{5};\ g_3 = \frac{1}{9}.$$

**Berekening der argumenten**

Is op deze wijze de oriënteering $\mathfrak{z}$ berekend, dan wordt deze aan de in $K$ gemeten richtingen toegevoegd en zijn daarmede de argumenten dier richtingen bekend.

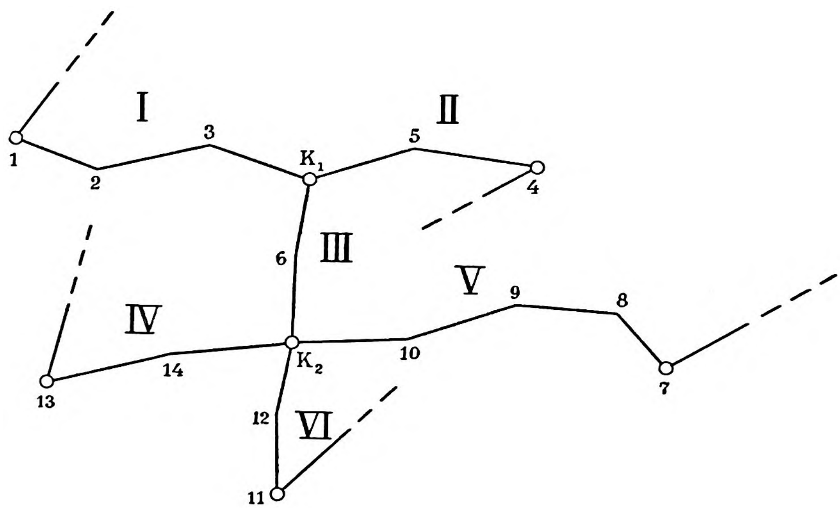
In elk der drie veelhoekstakken worden vervolgens de argumenten der veelhoekszijden vastgesteld. In tak I verkrijgen de *hoeken* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ elk een correctie gelijk aan $\frac{2}{9}$ van het verschil $f_{\alpha I}$ tusschen $\mathfrak{z} + r_{k,4}$ en $\psi_{0,1} + \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_4$; de *richting* $r_{k,4} + \mathfrak{z}$ krijgt een correctie gelijk aan $-\frac{1}{9} f_{\alpha I}$. In den tak II worden deze correcties resp. $\frac{2}{5} f_{\alpha II}$ en $-\frac{1}{5} f_{\alpha II}$ enz.

Zijn de argumenten vastgesteld, dan worden uitgaande van de bekende coördinaten 1, 6 en 9 drie stellen waarden voor de coördinaten van het knooppunt $K$ berekend. Uit de daarvoor verkregen bedragen worden eindwaarden vastgesteld door aan elk der afzonderlijke stellen waarden gewichten toe te kennen, *omgekeerd evenredig* met de som van de lengten der veelhoekszijden in elken veelhoekstak.

**Berekening der coördinaten**

De coördinaten van het knooppunt zijn hiermede vastgesteld. Ten slotte worden in elken in het knooppunt samenkomenden veelhoekstak de abscissen- en ordinatenverschillen gecorrigeerd op de vroeger aangegeven wijze, n.l. evenredig met de lengten der veelhoekszijden.

Het beginsel van vereffening van een veelhoeksnet met één knooppunt, kan zonder meer worden toegepast bij uitgebreider netten met meer knooppunten, zooals in het onderstaande voorbeeld, waarin 2 knooppunten en 6 veelhoekstakken voorkomen.




Elk dezer takken levert voor de bepaling der oriënteeringen een waarneming, waardoor de zes volgende correctievergelijkingen ontstaan:

**Vereffening van een veelhoeksnet met meer knooppunten**

$$z_1 = p_{\mathrm{I}} + v_{\mathrm{I}} \qquad \text{gewicht } g_{\mathrm{I}} = \frac{1}{7}$$

$$z_1 = p_{\mathrm{II}} + v_{\mathrm{II}} \qquad \text{,,} \quad g_{\mathrm{II}} = \frac{1}{5}$$

$$z_1 - z_2 = p_{\mathrm{III}} + v_{\mathrm{III}} \qquad \text{,,} \quad g_{\mathrm{III}} = \frac{1}{4}$$

$$z_2 = p_{\mathrm{IV}} + v_{\mathrm{IV}} \qquad \text{,,} \quad g_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{5}$$

$$z_2 = p_{\mathrm{V}} + v_{\mathrm{V}} \qquad \text{,,} \quad g_{\mathrm{V}} = \frac{1}{9}$$

$$z_2 = p_{\mathrm{VI}} + v_{\mathrm{VI}} \qquad \text{,,} \quad g_{\mathrm{VI}} = \frac{1}{5}.$$

6

Na eventuëele vervanging van de hier gegeven gewichten door andere daarmede evenredige grootheden, stelt men uit deze correctievergelijkingen normaalvergelijkingen op, waaruit de waarden $z_1$ en $z_2$ worden gevonden. Men bepaalt vervolgens de argumenten van alle zijden, zooals dit voor een enkel knooppunt is aangegeven, waarna de coördinatenverschillen worden berekend.

Als volgt worden nu de coördinaten van de knooppunten $K_1$ en $K_2$ vastgesteld. Nemen we eerst als onbekenden de abscissen $X_{k1}$ en $X_{k2}$ van $K_1$ en $K_2$.

Men verkrijgt nu de volgende correctievergelijkingen:

$$\begin{array}{lll}
X_{k1} & = X_1 + \text{abscissenverschillen tak I} + v_{\text{I}} & \text{gew. } 1 : [l]_{\text{I}} \\
X_{k1} & = X_4 + \text{,, ,, II} + v_{\text{II}} & \text{,, } 1 : [l]_{\text{II}} \\
X_{k1} - X_{k2} & = \text{,, ,, III} + v_{\text{III}} & \text{,, } 1 : [l]_{\text{III}} \\
X_{k2} & = X_{13} + \text{,, ,, IV} + v_{\text{IV}} & \text{,, } 1 : [l]_{\text{IV}} \\
X_{k2} & = X_7 + \text{,, ,, V} + v_{\text{V}} & \text{,, } 1 : [l]_{\text{V}} \\
X_{k2} & = X_{11} + \text{,, ,, VI} + v_{\text{VI}} & \text{,, } 1 : [l]_{\text{VI}}.
\end{array}$$

Ook hieruit kunnen twee normaalvergelijkingen worden opgesteld, waaruit de onbekenden $X_{k1}$ en $X_{k2}$ worden opgelost, waarna op de bekende wijze de overige coördinatenverschillen worden vastgesteld.

De berekening der ordinaten $Y_{k1}$ en $Y_{k2}$ geschiedt op analoge wijze. Voor deze drie berekeningen worden vanzelfsprekend voor de onbekenden benaderde waarden ingevoerd.

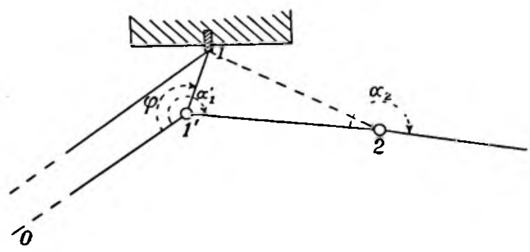
De hier ontwikkelde methode veroorzaakt weinig meer rekenarbeid dan het na elkander vereffenen van de deelen van een veelhoeksnet en geeft het voordeel, dat men bij een stelsel van even nauwkeurige veelhoeken geen keus behoeft te maken voor wat betreft de volgorde der vereffening.

Het verdient aanbeveling om vóór de meting reeds een beslissing te nemen over de wijze van vereffening. Zoo kan het voorkeur verdienen om het punt $K_1$ niet als knooppunt te bepalen, maar als gewoon veelhoekspunt, indien de veelhoek 1 ......... 4 bijzonder gunstig van vorm is. Men zal dan geen serie van drie richtingen in $K_1$ meten, doch eenvoudig den hoek $3, K_1, 5$. Bij de meting voor den tak naar $K_2$ is het veel beter in $K_1$ op een verwijderd punt te richten om zoodoende een nauwkeurige afsluitrichting voor den trek III te verkrijgen, die nu los van den veelhoek 1 — 4 is komen te staan.

**Complicatie bij de meting van den veelhoek**

In het voorgaande is aangenomen, dat de meting van de elementen van den veelhoek op directe wijze kan geschieden. Dikwijls echter is dit niet mogelijk en kunnen zich bij de meting bijzondere gevallen en complicaties voordoen, die een hulpconstructie noodzakelijk maken. Enkele der meest voorkomende zullen hieronder worden behandeld.

1°. Afsluiting van den veelhoek op een verzekeringsbout.




In nevenstaande figuur stelt 1 een verzekeringsbout voor, geplaatst in een gebouw; 2 is een veelhoekspunt, 0 een ver verwijderd R. D.-punt en 1′ een zooveel mogelijk in de nabijheid van den bout 1 gelegen hulppunt. Gemeten worden de hoeken $\alpha'_1$, $\alpha_2$ en $\varphi$, benevens de afstanden 1 — 1′ en 1′ — 2.

Door een overgangsberekening is het argument van 1′ — 0 vast te stellen, waarna de coördinaten van 1′ door richting en afstand uit 1 kunnen worden berekend. Hiermede is de veelhoek tot het normale geval herleid, omdat nu 1′ als bekend aansluitingspunt kan worden beschouwd. Voorwaarde is, dat de coördinaten van 1′ even nauwkeurig zijn als die van 1. Dit is zonder moeite bereikbaar, als de afstand 1′ — 1 nauwkeurig kan worden bepaald, hetgeen steeds het geval is, als deze afstand kort is.

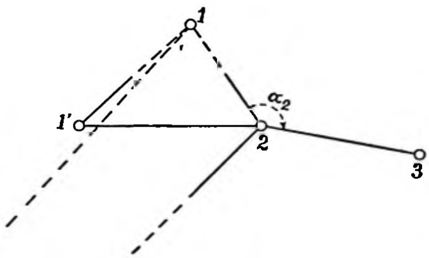
**Afsluiting van den veelhoek op een verzekeringsbout**

2°. Aansluiting op een hoog gelegen punt.

**Aansluiting op een hoog gelegen punt**

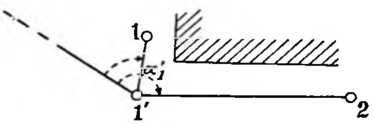
Is het punt (toren) niet verzekerd, dan geschiedt de aansluiting aan het centrum 1 als hiervoor aangegeven, met dit verschil, dat de afstand 1 — 1′ langs indirecten weg moet worden gevonden. Hiervoor is een tweede hulppunt noodig om dezen afstand als zijde van een driehoek te kunnen berekenen.

Aangezien de afstand 1 — 1′ veelal niet kort kan worden genomen, verdient het aanbeveling bij de berekening der coördinaten op 1 zelf af te sluiten. Men krijgt dan gewoonlijk een situatie als in nevenstaande figuur. Na de bepaling der richtingen van de veelhoekszijden wordt 1 — 2 als veelhoekszijde behandeld.



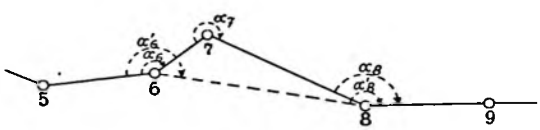

Deze oplossing is iets minder fraai dan de vorige, omdat de overgang in het algemeen grooter is, met het gevolg, dat de fouten in de lengtemeting van 1′ — 2 schadelijken invloed uitoefenen.

Deze schadelijke invloed kan worden verkleind door de lengtemeting zoo nauwkeurig mogelijk uit te voeren; ook kan dit worden bereikt door de aansluitingsrichting — indien mogelijk — zoo te kiezen, dat de overgang gering wordt, dus zoodanig, dat genoemde richting niet te veel afwijkt van de richting 2 . 1.




3°. Oplossing 1° kan worden gebruikt voor het geval, dat door terreinomstandigheden de zijde 1 — 2 niet of moeilijk is te meten (zie de figuur). De veelhoek wordt dan niet op het punt 1 aangesloten, maar op een dicht daarbij gelegen punt 1′, waar de richting naar een zoo ver mogelijk verwijderd bekend punt wordt gemeten.

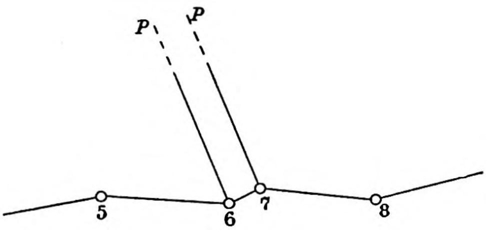
4°. De werking van een abnormaal korte zijde midden in een veelhoek kan onschadelijk worden gemaakt door deze geheel uit te schakelen, zooals in de figuur is voorgesteld. Op de polygoonpunten 6 en 8 worden extra de hoeken $\alpha'_6$ en $\alpha'_8$ gemeten.




Vereffend wordt dan de veelhoek ......... 5, 6, 8, 9 ........., terwijl de lengte van de zijde 6.8 in den driehoek 6.7.8. wordt berekend.

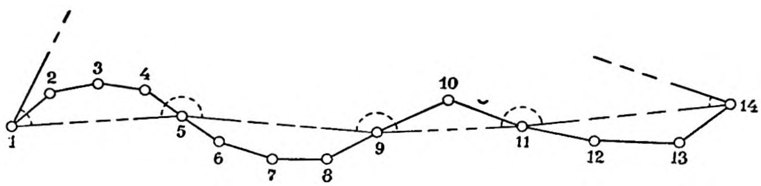
Wanneer de punten 6 en 8 niet onderling zichtbaar zijn, is het niettemin mogelijk den schadelijken invloed van de zijde 6 — 7 grootendeels te ontgaan, mits in de punten 6 en 7 de richting naar een ver verwijderd driehoekspunt *P*

(zie de figuur) kan worden gemeten. Men zal nu den veelhoek ......... 5, 6, 7, 8 ......... geheel op de bekende wijze doorrekenen, waardoor voorloopige coördinaten van 6 en 7 bekend worden. Met behulp van deze coördinaten en die van het punt *P* kunnen met zeer voldoende nauwkeurigheid de argumenten der richtingen 6 *P* en 7 *P* worden vastgesteld.




Wanneer men nu het begin van den veelhoek afsluit op de richting 6 *P* en het einde op de richting 7 *P*, dan wordt hierdoor het voordeel bereikt, dat men de argumenten der zijden vrijwel geheel onafhankelijk van den doorloopenden veelhoek verkrijgt.

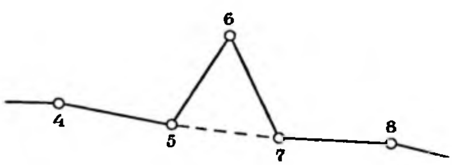
5°. In een veelhoek met een groot aantal punten bijv. langs een sterk kronkelende dijk kan verbetering worden gebracht door uit deze eenige punten te kiezen, gelegen op onderling ongeveer gelijke afstanden, en deze te verbinden tot een nieuwen, meer gestrekten veelhoek met langere zijden, zooals in de figuur is aangegeven.




Gekozen zijn daartoe de punten 1, 5, 9, 11 en 14. In elk der genoemde punten meet men alle richtingen; in 5 meet men dus de richtingen 1, 4, 9 en 6.

Door aldus te handelen wordt een opstapeling van richtingsfouten ten gevolge van het groote aantal hoekpunten gestuit. Bij de vereffening worden eerst de argumenten der veelhoekszijden 1—5, 5—9, 9—11 en 11—14 vastgesteld. Nadat dit is geschied, worden de argumenten der korte zijden bepaald door telkens een stel tusschengelegen punten als een veelhoek te beschouwen. Aldus sluit men bijv. den veelhoek 5, 6, 7, 8, 9 op de argumenten 5—9 en 9—5 af. Als de argumenten alle vaststaan, wordt op de bekende wijze de geheele veelhoek langs de korte zijden berekend.

6°. In nevenstaande figuur is de gestrekte vorm van den veelhoek ......... 4, 5, 6, 7, 8 ......... onderbroken door de sterk zijwaartsche afwijkingen van de veelhoekszijden 5—6 en 6—7. Men stelt de argumenten van de veelhoekszijden op de gewone wijze vast. Dan berekent men met behulp van de gegeven elementen van driehoek 5, 6, 7 de zijde 5—7 benevens de hoeken 4, 5, 7 en 5, 7, 8.




Bij de berekening van de coördinaten slaat men het punt 6 over. Na vaststelling der coördinaten worden de coördinaten van 6 uit afzonderlijke berekening van den veelhoek 5, 6, 7 gevonden.

Tenslotte moge hier met een enkel woord de indirecte afstandsmeting worden besproken.

Indirecte afstandsmeting

Het is mogelijk, zelfs in zeer ongunstig terrein, de lengtemeting met den meetband uit te voeren met voldoenden graad van nauwkeurigheid. Dit kan natuurlijk een aantal min of meer uitgebreide maatregelen vorderen, die tijd kosten. Meestal zal echter deze extra-tijd gering zijn in vergelijking met den tijdsduur van het geheele werk, waarvan de veelhoeksmeting een deel is.

Bij gebruikmaking van de indirecte afstandsmeting kan een zekere tijdwinst bereikt worden; niet bij alle bestaande methoden is deze even groot, terwijl juist bij de methoden, die een min kostbaar instrumentarium vereischen, de besparing het geringst is, mede door een zekere hoeveelheid kantoorwerk, noodig voor de vaststelling van de definitieve lengten.

Mits de resultaten voldoende nauwkeurig zijn, kan de indirecte afstandsmeting bij de veelhoeksmeting worden gebezigd. In ons land kan echter in het algemeen gesproken het gebruik van de indirecte afstandsmeting in de eischen der lengtemeting voor veelhoeken *niet* hare motiveering vinden.

## § 18. MEETPUNTEN

Voor de bepaling van meetpunten in het terrein wordt verwezen naar hetgeen daaromtrent is medegedeeld in § 21 „Nauwkeurigheid der uit te voeren metingen".

De formules voor de *berekening* van de coördinaten der meetpunten zijn de navolgende:

$$X_{i+1} - X_i = p \cdot a_{i,\,i+1}$$
$$Y_{i+1} - Y_i = q \cdot a_{i,\,i+1}$$

waarin:

$$p = \frac{X_E - X_A}{[a]} \text{ en } q = \frac{Y_E - Y_A}{[a]}$$

met de contrôle:

$$p\,(X_E - X_A) + q\,(Y_E - Y_A) = \frac{l_2}{[a]}.$$

Berekening van de coördinaten der meetpunten

Hierin is $A$ het beginpunt, $E$ het eindpunt der meetlijn $AE$, $l$ de afstand $AE$, zooals deze uit de coördinaten van begin- en eindpunt wordt afgeleid en $[a]$ de som van de lengten $a$ in de meetlijn $AE$, gemeten van meetpunt tot meetpunt. Stelt men:

$$f_l = l - [a] \quad \text{of} \quad [a] + f_l = l$$

zoo wordt, aangezien $f_l$ klein is ten opzichte van $[a]$:

$$\frac{l_2}{[a]} = \frac{([a] + f_l)^2}{[a]} = [a] + 2f_l$$

zoodat:

$$2\,f_l = p\,(X_E - X_A) + q\,(Y_E - Y_A) - [a].$$

In het formulier n°. 25 worden beginpunt, tusschenpunten en eindpunt ingeschreven in de volgorde, waarin zij in de meetlijn zijn gelegen. Daarnaast worden de afstanden $a$ van punt tot punt vermeld en vervolgens worden de coördinaten van begin- en eindpunt ingeschreven. Onder de laatste worden aftrekstreepen getrokken, waaronder worden vermeld $X_E - X_A$ en $Y_E - Y_A$. Na bepaling van $[a]$ kunnen $p$ en $q$ worden berekend uit bovenstaande betrekkingen en ten slotte $f_l$. De waarden $p$ en $q$ worden resp. geschreven onder de coördinatenverschillen $X_E - X_A$ en $Y_E - Y_A$ en $f_l$ onder $[a]$.

Door berekening van de achtereenvolgende coördinatenverschillen worden punt voor punt de coördinaten der tusschenpunten gevonden.

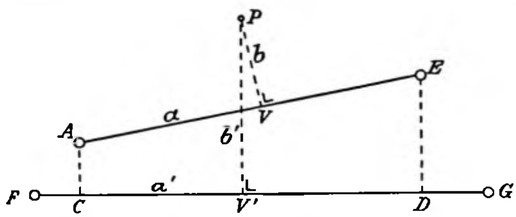
Voor de berekening van de coördinatenverschillen van top $T$ en voetpunt $V$ van een loodlijn ter lengte $b$ gelden de betrekkingen:

$$X_T - X_V = -q\,b; \quad Y_T - Y_V = +p\,b.$$

Voor een loodlijn, links van de meetlijn gelegen, wordt aan $b$ het positief teeken gegeven, voor een rechts gelegen loodlijn het negatief teeken; links en rechts gerekend, ziende van het beginpunt $A$ der meetlijn naar het eindpunt $E$.

### OMREKENEN VAN LOODLIJNEN OP EEN ANDERE MEETLIJN

Wanneer een punt $P$ door zijn rechthoekige coördinaten is vastgelegd ten opzichte van een meetlijn $AE$ (zie de figuur) en men wenscht deze te kennen ten opzichte van een andere meetlijn $FG$, dan kan men eerstbedoelde coördinaten omrekenen door de opgave te beschouwen als een vraagstuk van *aansluiting aan twee punten.*




In het geval, in de figuur voorgesteld, is er verband tusschen beide meetlijnen, doordat de punten $A$ en $E$, liggende in de eene meetlijn in rechthoekige coördinaten ten opzichte van de andere bekend zijn. Men beschouwt nu $A$ en $E$ als aansluitingspunten van twee rechthoekige stelsels $a\ b$ en $a'\ b'$. Van $A$ en $E$ zijn in beide stelsels de coördinaten bekend; men berekent nu de transformatieconstanten $p$ en $q$ op de wijze als dit bij de aansluiting aan twee punten is aangegeven, waarna de nieuwe coördinaten $a'$ en $b'$ van het punt $P$ en eventueel van andere in de meetlijn $AE$ opgemeten punten, ten opzichte van de lijn $FG$ kunnen worden berekend.

In het algemeen zal zich in de practijk het geval voordoen, dat de aansluitingspunten $A$ en $E$ niet in een der meetlijnen zijn gelegen, maar dat zij in beide lijnen door middel van loodlijnen zijn opgemeten.

In de bijlagen zijn twee getallenvoorbeelden van omrekening van loodlijnen op een andere meetlijn opgenomen; het eerste voorbeeld behandelt het hier bedoelde algemeene geval.

## § 19. DETAILMETING

Voor de uitvoering van de detailmeting zijn uiteraard geen vaste regelen te stellen. Niettemin worden de volgende algemeene opmerkingen ter overdenking aanbevolen.

1°. Met inachtneming van de eischen, die aan de metingen worden gesteld, moeten deze zoo eenvoudig mogelijk worden gehouden. Niet het *aantal* cijfers, maar hun *doelmatigheid* leidt tot een goed resultaat.

2°. De te verzamelen meetcijfers kunnen globaal in twee categoriën worden onderverdeeld:

*a.* De cijfers noodig voor de verbinding van de terreinobjecten aan den meetkundigen grondslag;

*b.* De cijfers — min of meer buiten verband met den meetkundigen grondslag — die een *directe* bepaling geven van de onderlinge ligging van de terreinvoorwerpen. Bedoeld worden meetcijfers, die betrekking hebben op de breedte van een gang, de afmetingen van een gebouw, den afstand van een gebouw tot een grens, de afstanden tusschen breekpunten van een grens, enz.

Men zou hier nog een derde categorie aan toe kunnen voegen n.l. de cijfers voor de oppervlakteberekening. Deze missen echter het principiëele, dat de beide eerstgenoemde soorten kenmerkt. Een scherpe oppervlakteberekening *behoeft* toch niet uit meetcijfers te geschieden. Bij het wel of niet meten van een bepaalden afstand speelt de opportuniteit de belangrijkste rol. De eene keer zal men een maat nemen, een andermaal niet. Dit hangt van terreinsomstandigheden af. Wordt het bepalen van een afstand te lastig of te tijdroovend, dan laat men het na, immers het oppervlak kan toch wel berekend worden, zij het met eenige meerdere moeite.

**Kortgesloten maten**

Ofschoon de onder *a* en *b* genoemde soorten van meetcijfers elkaar aanvullen, hebben zij toch ieder een eigen en wel onderscheiden beteekenis. Voor categorie *a* is dit onmiddellijk duidelijk; bij de cijfers onder *b* genoemd, die als *kortgesloten maten* kunnen worden aangeduid, zullen er vele zijn, die ten doel hebben de cijfers *a* te controleeren. Vooral echter bij opmetingen, die een *blijvende* beteekenis hebben, zooals de metingen voor kadastrale doeleinden, hebben de kortgesloten maten de zeer speciale rol latere uitzettingen van verloren gegane grensteekens practisch mogelijk te maken. Het zijn deze maten, die grootendeels de toekomstige waarde van den arbeid bepalen en die beslissend zijn voor de kwaliteit van het uitgevoerde werk.

Dit komt, omdat men er nimmer op kan vertrouwen een meetkundigen grondslag, die in het terrein kunstmatig is aangebracht, in een verre toekomst in bruikbaren vorm te handhaven. Een handig dienstbaar maken van de terreinobjecten zelve aan het zeer belangrijke doel, de ligging van de terreingrenzen tot in een verre toekomst te bewaren, is daarom noodzakelijk. Richtsnoer moet zijn, dat de blijvende terreinvoorwerpen de minder blijvende moeten vasthouden en dat het mogelijk moet zijn op eenvoudige wijze de kortgesloten maten tot dit doel te gebruiken.

3°. De detailmeting geschiedt in hoofdzaak volgens twee meetmethoden, n.l. de *orthogonale* en die van het *meetlijnenverband* (verlengden). De orthogonale methode heeft het voordeel, dat bij evenwijdige verplaatsing van een meetlijn de coördinaten ten opzichte van de nieuwe meetlijn gemakkelijk uit die ten opzichte van de oorspronkelijke kunnen worden afgeleid.

De andere methode heeft echter het voordeel een zuivere interpolatiemethode te zijn.

Bij de orthogonale methode, die een extrapolatiemethode is — dit heeft zij gemeen met de hier te lande weinig toegepaste *voerstraalmethode* — mogen de loodlijnen een bepaalde lengte niet overschrijden. Men zie hiervoor § 21.

## § 20. VELDWERK

1°. De veldaanteekeningen mogen geen twijfel overlaten, wat betreft de bedoeling der meetgetallen. Zoo zal bij gebouwen, wanneer deze niet in vlakke muren zijn opgetrokken, een nadere aanduiding noodig zijn, zooals plint, pilaster, enz.

Bij grensteekens zal het midden worden aangegeven; waar dit geen twijfel overlaat, kan worden volstaan met de in de I. K. (art. 77, punt 11) voorkomende teekens, waarbij men zorgt de vermelding van den aard van de grens niet te veel

af te korten, hetgeen bij minder duidelijk schrift tot vergissingen zou kunnen leiden. Is de kant van een hek of muur de grensscheiding, dan is het gewenscht dit zoo volledig mogelijk aan te duiden.

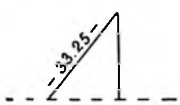



2°. Kadsteenen worden door een vierkant aangegeven □, piketten, draineerbuisjes enz. door △ of ◯, met vermelding wat het voorstelt.

3°. Aangezien de vaste punten doorloopend worden genummerd volgens een kaartsysteem, waarop de aanmeting dezer punten voorkomt, heeft het geen nut om op het veldwerk bij die punten extra te vermelden D P, V P of M P. Het is voldoende de nummers der punten door een rechthoek te omgeven [1296], beide in zwart, met het oog op det doordruksysteem; verwarring met meetcijfers wordt daardoor voorkomen.

Wanneer huisnummers op het veldwerk worden vermeld, worden zij omkringd (53), eveneens om verwarring met meetcijfers te ontgaan.

Om dezelfde reden is het raadzaam, om bij het meten van transversalen en treklijnen het meetgetal evenwijdig aan deze lijnen te plaatsen en niet haaks daarop bij het eindpunt, waar meestal reeds verschillende getallen en aanduidingen geplaatst zijn.




4°. Indien gebouwen in hout zijn opgetrokken, moet daarvan op het veldwerk blijken; een houten schuur kan n.l. worden vervangen door een steenen op *ongeveer* dezelfde plaats.

5°. Op het veldwerk moet de lengte van de gebruikte meetveer worden vermeld; voor het bepalen van de juiste lengte wordt zoonoodig de temperatuur vermeld.

6°. De veldaanteekeningen worden in het algemeen gesteld op papier van klein formaat, Kadaster n°. 137, doordruksysteem; het wordt bij voorkeur op schaal aangelegd, maar behoeft in onderdeelen niet op maat te zijn.

Daar een hermeting als regel geen nieuwen toestand schept, maar rekening houdt met voorafgaande opmetingen in het te hermeten terrein, verdient het in het algemeen de voorkeur de veldwerken niet afzonderlijk te nummeren, maar de nummering van de reeds bestaande veldwerken voort te zetten, en de hermetingsveldwerken, ook in verband met een systematische verwijzing, op te bergen in het archief van de bijhouding.

## § 21. NAUWKEURIGHEID DER UIT TE VOEREN METINGEN

**Richtlijnen voor de nauwkeurigheid**

Teneinde voor de nauwkeurigheid, waarmede in het algemeen metingen behooren te worden uitgevoerd, richtlijnen te vinden, moet worden uitgegaan van de nauwkeurigheid van de ligging der gegeven punten der Rijksdriehoeksmeting. Men neme aan, dat deze gegeven wordt door een tot cirkel geworden foutenellips met een straal van 3 cm, zoodat derhalve de middelbare fout in de coördinaten 3 cm bedraagt.

Aan de nauwkeurigheid van de puntsbepaling in de drie verschillende gebieden, onverschillig of deze geschiedt door driehoeks- of veelhoeksmeting of dat het de bepaling van meetpunten betreft, wordt deze *eisch* gesteld:

*de wortel uit het gemiddelde kwadraat van de lange as van de foutenellipsen bij de bepaling van een niet te gering aantal punten verkregen, moet zijn in:*

*gebied* 1 — 3 cm
*gebied* 2 — 6 cm
*gebied* 3 — 12 cm.

Bij de hierna volgende aanwijzingen, die bovenbedoelde richtlijnen beoogen te geven, wordt de gestelde eisch aldus geinterpreteerd, dat bedragen voor de middelbare nauwkeurigheid van de fundamenteele operaties zullen worden afgeleid, daarbij uitgaande van de onderstelling, dat het de bedoeling is een punt zoodanig te bepalen, dat de nauwkeurigheid gegeven wordt door een tot cirkel geworden foutenellips met voor de drie gebieden stralen $d$ van resp. 3, 6 en 12 cm.

## ENKELE PUNTSBEPALING

**Bepaling uit binnen-richtingen**

Ondersteld wordt een vraagstuk van bepaling van een punt uit $n$ *binnenrichtingen* in het gebied 1. Liggen de gegeven punten niet op al te ongelijke afstanden, dan kan het vraagstuk behandeld worden met gelijke gewichten voor de richtingen.

In de praktijk worden de middelbare fouten in de coördinaten $M_x$ en $M_y$ berekend uit:

$$M_x^2 = Q_{xx}\, m^2;\; M_y^2 = Q_{yy}\, m^2$$

in welke formules voor $m^2$ gesubstitueerd wordt de voor deze grootheid bij de eigenlijke vereffening gevonden waarde. Wegens het zeer geringe aantal overtollige waarnemingen heeft deze $m$, een statistische grootheid, weinig waarde. Van geval tot geval wisselt deze dan ook vrij sterk. Een beter bedrag voor $m$ verkrijgt men door de stationsvereffening in de beschouwingen te betrekken.

Zij $m_s$ de middelbare fout in de gemiddelde richting bij de stationsvereffening verkregen, $m_v$, die bij de coördinatenvereffening, dan berekene men:

$$\overline{m}^2 = \frac{(r-1)\,(s-1)\, m_s^2 + (r-3)\, m_v^2}{(r-1)\,(s-1) + r-3} \qquad (1)$$

Hierin is $r$ het aantal richtingen, $s$ het aantal enkele series en is derhalve $(r-1)$ $(s-1)$ het aantal overtollige waarnemingen bij de stationsvereffening, $r-3$ dat bij de coördinatenvereffening. Met deze waarde van $\overline{m}$, wordt dan bepaald:

$$M_x^2 = Q_{xx}\, \overline{m}^2;\; M_y^2 = Q_{yy}\, \overline{m}^2$$

Een formule als (1) bezige men steeds, wanneer er sprake is van een vereffeningsvraagstuk, dat in tempo's is opgelost. In het onderhavige geval zijn hier de tempo's de stations- en de coördinatenvereffening. Elk der tempo's draagt tot den teller van (1) een term bij; de in elke term voorkomende coëfficiënt is het aantal overtollige waarnemingen van het betreffende tempo. De noemer is de som van de in den teller optredende coëfficiënten en stelt het totale aantal overtollige waarnemingen voor van het als één geheel beschouwde vraagstuk.

Moet de nauwkeurigheid van de bepaalde punten aan zekere eischen voldoen, dan beteekent dit, dat van een groot aantal punten de middelbare fouten in de coördinaten om het daarvoor gestelde bedrag moeten schommelen. De berekende middelbare fouten leveren daarom slechts een contrôle, die eerst op den langen duur toe te passen is.

Wenscht men te weten, hoe nauwkeurig de richtingsmetingen moeten worden uitgevoerd, op welke afstanden de gegeven punten mogen liggen, enz. dan heeft

men in de incidenteele middelbare fouten geen aanknoopingspunt, men moet het *middelbare* bedrag ervan kennen. Dit kan men als volgt schatten.

Aannemende, dat de afstanden tot de gegeven punten niet al te zeer uiteenloopen en deze op een gemiddelden afstand $L$ liggen, dat $d$ de straal is van hun foutencirkel en er geen correlatie tusschen de coördinaten der verschillende punten aangenomen behoeft te worden, is, als verder $m$ de middelbare fout voorstelt in de meting van een richting:

$$M_x^2 = \left\{m^2 + \frac{\varrho^2 d^2}{L^2}\right\} Q_{xx} \tag{3}$$

$$M_y^2 = \left\{m^2 + \frac{\varrho^2 d^2}{L^2}\right\} Q_{yy} \tag{4}$$

Zonder de algemeenheid te kort te doen, mag aangenomen worden, dat de coördinaatassen evenwijdig zijn met de hoofdassen van de foutenellips. Dan is $[a'\ b'] = o$ en:

$$Q_{xx} = \frac{1}{[a'a']} \quad ; \quad Q_{yy} = \frac{1}{[b'b']}$$

$M_x$ en $M_y$ worden nu de halve assen van de foutenellips, laat $M_x$ meer in het bijzonder de halve groote as zijn en stel:

$$V^2 = \frac{M_x^2}{M_y^2} = \frac{Q_{xx}}{Q_{yy}} = \frac{[b'b']}{[a'a']} \tag{5}$$

Is $\bar{Z}$ het zwaartepunt van de punten van de inverse figuur (zie § 12), $A_i$ een punt dezer figuur en $l'_i$ de afstand $\overline{Z}\ \overline{A_i}$, dan wordt nog gesteld:

$$\frac{n}{L'^2} = \left[\frac{1}{l_i'^2}\right] \quad \text{($n$ is het aantal richtingen).}$$

Men heeft nu:

$$[a'a'] = \frac{n}{1 + V^2} \frac{\varrho^2}{L'^2}$$

en voor (3) kan geschreven worden:

$$M_x^2 = \left\{m^2 + \frac{\varrho^2 d^2}{L^2}\right\} \frac{(1 + V^2)\, L'^2}{n\, \varrho^2} \tag{6}$$

Wenscht men dat de middelbare fout in de coördinaten van een te bepalen punt aan den eisch voldoet, dat deze kleiner moet zijn dan een zeker bedrag $d_1$, zoo is het voldoende, dat voor de halve groote as $M_x$ voldaan wordt aan:

$$M_x^2 \leqq d_1^2. \tag{7}$$

Uit (3) of (6) is bij bekende waarden voor $m$, L en $Q_{xx}$ of $V$ en L de waarde van $m$ te berekenen.

In beide gevallen moet men de asrichtingen van de foutenellips kennen; daarenboven hetzij $Q_{xx}$, hetzij $V$ en $L'$.

Men gaat hiertoe als volgt te werk.

Na de verkenning kent men in het te bepalen punt de aldaar zichtbare gegeven punten en bij benadering zijn ligging. Men teekent nu de inverse figuur (zie weer § 12). Deze inverse figuur beschouwe men als foutentoonende figuur. Trek hierin een hulprechte van van der Sterr en construeer daarop het gemiddelde punt. Gaan in een fouten toonende figuur alle rechten door één punt, dan zal dit het definitieve

punt zijn. Bij de inverse figuur als foutentoonende figuur zal dus de oorsprong het definitieve punt zijn. Verbindt men derhalve het bovengenoemde geconstrueerde gemiddelde punt met den oorsprong, dan heeft men in deze rechte en de gebezigde hulprechte twee toegevoegde richtingen van de foutenellips. Onder aanname van een willekeurige constante voor $m^2$ construeert men nu de foutenellips. Hierin trekt men op het oog de assen. De halve lange as, gedeeld door de aangenomen waarde voor $m$ geeft $\sqrt{Q_{xx}}$ waarna uit (3) en (7) $m^2$ volgt. Nu kan men dus nagaan of het verkende punt met de middelen waarover men beschikt op de gewenschte wijze bepaald kan worden.

Na de meting construeert men in de reeds voorhanden inverse figuur de foutentoonende figuur en voert de vereffening uit. Hierbij kan men dan profiteeren van verschillende nu in de inverse figuur aanwezige gegevens.

Formule (6) eischt de bepaling van dezelfde grootheden en opent dus wat dit betreft geen nieuwe gezichtspunten. Zij veroorlooft echter het doen van globale voorspellingen. In gebied 1 b.v. is $d = d_1 = 3$ cm. $L'^2$ is in het algemeen grooter dan $L^2$, in het gunstigste geval, zooals gemakkelijk kan worden nagegaan, zijn beide bedragen gelijk; het te bepalen punt ligt dan in het zwaartepunt van de figuur der inverse punten. Laat nu b.v. $L'^2 = 2\,L^2$ zijn. Is bovendien $V^2 = 2$, dan moet:

$$d^2 \frac{n\,\varrho^2}{6\,L^2} \geqq m^2 + \frac{\varrho^2 d^2}{L^2}$$

of

$$L^2\,m^2 \leqq d^2\varrho^2 \left(\frac{n}{6} - 1\right)$$

Voor $n = 6$ is dus aan den gestelden eisch nimmer te voldoen. Is daarentegen $L'^2 = 1{,}5\,L^2$, dan krijgt men:

$$L^2 m^2 \leqq d^2\varrho^2 \left(\frac{n}{4{,}5} - 1\right)$$

Bij $n = 6$, heeft men thans:

$$L\,m \leqq \varrho d \sqrt{\frac{1}{3}} = \varrho \sqrt{3.10^{-2}}.$$

Voor L bv. 1700 meter, wordt:

$$m \leqq 6{,}4^{cc}.$$

Voor andere omstandigheden als deze kan men op overeenkomstige wijze handelen en zoodoende zich een algemeen inzicht verschaffen in de noodzakelijke meetnauwkeurigheid en in de eischen aan de meetkundige eigenschappen van het vraagstuk te stellen.

Als complicaties van het behandelde standaardgeval doen zich voor:

*a*: de richtingen zijn in meer dan één serie gemeten;

*b*: er zijn hoeken gemeten;

Ook in deze beide gevallen gaat men uit van (3) en (4). De bedragen van $Q_{xx}$ en $Q_{yy}$ worden na de verkenning in de inverse figuur vastgesteld.

Zijn bij het vraagstuk der puntsbepaling door binnenrichtingen de afstanden zeer ongelijk, zoodat de langste afstand meer dan twee maal zoo lang is als de kortste, zoo moet met verschillende gewichten worden gerekend. Om hier eveneens een gewenschte nauwkeurigheid te bereiken, moeten, onder aanname van een *globale* waarde van $M$, de waarden $Q_{xx}$ en $Q_{yy}$ worden berekend.

Men heeft nu:

$$M_x^2 = Q_{xx}\,\mu^2 \quad \text{en} \quad M_y^2 = Q_{yy}\,\mu^2.$$

Bij het nomogram van de gewichten is $\mu^2$ op 196 aangenomen. Worden de gewichten gesteld op de bedragen, die het *nomogram levert* — niet dus met een factor vermenigvuldigd — dan moet in bovenstaande betrekkingen voor $\mu^2$ worden ingevuld 196. Denken we weer $[a'\ b']$ nul, dan moet dus:

$$Q_{xx} \leqq \frac{d}{196} \text{ en } Q_{yy} \leqq \frac{d}{196}.$$

In dit geval mag men verwachten, dat in doorsnede inderdaad de gewenschte nauwkeurigheid wordt verkregen. Is de aangenomen waarde van $M$, globaal berekend uit (1) niet toereikend, zoo moet deze zooveel kleiner worden gekozen, totdat aan de eischen voldaan wordt.

**Bepaling van een punt uit buiten-richtingen (voorwaartsche insnijding)**

Bij het vraagstuk der voorwaartsche insnijding moet een voorwaartsche richting steeds geöriënteerd worden op ten minste twee richtingen naar bekende punten. Deze punten moeten gelegen zijn op afstanden, welke meer dan anderhalf maal zoo groot zijn als de afstand naar het te bepalen punt; wanneer dit niet mogelijk blijkt, moet het aantal dier punten worden vergroot. Stelt men het aantal richtingen naar bekende punten op het station gelijk aan $r$ en is de gemiddelde afstand naar de bekende punten $p$ maal die naar het te bepalen punt, dan kan men om een leidraad te hebben, zich houden aan de formule:

$$p^2 \cdot r = 4.$$

In dit geval is de invloed van de fouten in de punten, waarop geöriënteerd wordt, van ondergeschikte beteekenis. De invloed van de fouten in de ligging van de standplaats wordt geringer naarmate de *afstand* van het *zwaartepunt* van de inverse punten der gegeven punten in een inversie, waarvan de standplaats het centrum vormt, tot het *inverse punt van het te bepalen punt* kleiner is. In het algemeen is dit het geval, wanneer de bekende oriënteeringspunten in de richting van het te bepalen punt zijn gelegen.

Ter bepaling van de nauwkeurigheid van de richtingsmeting kan men de volgende formule als benadering gebruiken:

$$M_x^2 = \left(m^2\,\frac{t+1}{t} + \frac{\varrho^2}{t\,L_t^2}\,d_t^2 + \frac{\varrho^2}{L^2}\,d_s^2\right) Q_{xx} \tag{8}$$

$$M_y^2 = \left(m^2\,\frac{t+1}{t} + \frac{\varrho^2}{t\,L_t^2}\,d_t^2 + \frac{\varrho^2}{L^2}\,d_s^2\right) Q_{yy} \tag{9}$$

Hierin is:

$t$ het aantal richtingen naar bekende punten op elk der standplaatsen;

$L_t$ het gemiddelde van de afstanden waarop de oriënteeringspunten van de standplaatsen verwijderd zijn;

$L$ het gemiddelde van de afstanden van de standplaatsen tot het te bepalen punt;

$d_t$ de middelbare fout in de coördinaten van de oriënteeringspunten;

$d_s$ de middelbare fout in de coördinaten van de standplaatsen.

De grootheid $t$ is minstens 2, $L_t^2$ minstens ongeveer 2 maal $L^2$.

Is weer $V$ de verhouding lange as gedeeld door korte as foutenellips, dan kan voor $Q_{xx}$ geschreven worden:

$$Q_{xx} = \frac{1 + V^2}{n\,\varrho^2}\,L^2$$

waarin $n$ het aantal voorwaartsche richtingen is.

De formules (8) en (9) zijn reeds vrij sterke benaderingen. Met voordacht is een verdere vereenvoudiging achterwege gelaten om de toepasselijkheid van de formules niet te schaden.

Het streven moet erop gericht zijn bij gezamenlijk optreden van voor- en achterwaartsche richtingen hun nauwkeurigheid gelijk te doen zijn. De coëfficiënten van $Q$ in (3) en (8) zijn de kwadraten van de middelbare fouten in een richting, indien $L$ daarin de afstand tot het te bepalen punt voorstelt.

In de gebieden 2 en 3 moet er op worden gelet, dat het kan voorkomen, dat men moet gebruik maken van punten met verschillende nauwkeurigheid n.l. punten van de Rijksdriehoeksmeting en punten van lagere orde, n.l. de eigen bepaalde punten in het gebied. Bij de eerste heeft $d$ de waarde 3 cm, bij de tweede 6 of 12 cm.

Wanneer punten met ongelijke nauwkeurigheid voorkomen, gebruike men de formule van het onnauwkeurigste punt.

Hoewel de gegeven formules benaderingen zijn, mag verwacht worden, dat zij in het algemeen voldoende steun bieden bij het à priori vaststellen van de nauwkeurigheid der waarnemingen. Mocht de practijk uitwijzen, dat zij niet geheel en al aan de verwachtingen beantwoorden, zoo is het mogelijk een correctie toe te passen in den vorm van een geringe wijziging van den constanten factor.

Bij de beoordeeling van de eischen, aan een theodoliet te stellen, kunnen de gegeven formules goede diensten bewijzen. Men vermenigvuldige dan de uitkomsten, die zij geven, nog met een zekerheidsfactor, bijv. 0,7, om vooral binnen de grenzen te kunnen blijven, Men bedenke daarbij, dat een eenvoudige theodoliet, licht en gemakkelijk in het transport, die misschien in een enkel geval bij toepassing van de reïteratie-methode onvoldoend nauwkeurige richtingen levert, toch aan de eischen van nauwkeurigheid naar behooren kan beantwoorden, indien men in zoodanige gevallen het punt bepaalt door het meten van hoeken, die dan volgens de repetitie-methode kunnen worden waargenomen.

## LENGTEMETING

**nauwkeurigheid der lengtemeting**

Voor de berekening van de middelbare fout in de meting van een lengte wordt als algemeene betrekking aangenomen:

$$m_l^2 = a\,l^2 + b\,l \qquad (2)$$

waarin $a$ en $b$ de kwadraten van respectievelijk de *systematische* en de *toevallige fout* voorstellen, beide in cm in een lengte van 1 hm; de middelbare fout $m_l$ is eveneens in cm uitgedrukt, $l$, de lengte van de lijn, in hm.

De middelbare fout $m_v$ in het *verschil* tusschen twee metingen van denzelfden afstand, verricht onder dezelfde omstandigheden, dus o.a. gemeten met hetzelfde instrument (meetveer), wordt gevonden uit:

$$m_v^2 = 2\,b\,l.$$

De middelbare fout in het *gemiddelde* van twee dergelijke metingen vindt men uit:

$$m_{gem}^2 = a\,l^2 + \tfrac{1}{2}\,b\,l.$$

Voor de middelbare fout in het *verschil* tusschen twee metingen van denzelfden afstand onder sterk verschillende omstandigheden (o.a. twee verschillende meetbanden) geldt:

$$m_v^2 = 2\,a\,l^2 + 2\,b\,l$$

en voor hun *gemiddelde*:

$$m_{gem}^2 = \tfrac{1}{2}\,a\,l^2 + \tfrac{1}{2}\,b\,l.$$

Het blijkt, dat in de gevallen, waarin het systematische deel van de fout in de lengtemeting invloed op het resultaat heeft — niet bijv. bij de bepaling van meetpunten in de verbindingslijn — de lengtemeting, met het oog juist op deze foutenbron, aan hooge eischen moet voldoen.

Voor de verschillende gebieden worden de volgende waarden aangenomen:

| gebied | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $a$ | 2 | 8 | 32 |
| $b$ | 1,5 | 6 | 24 |
| $m_v = \sqrt{2\,b\,l}$ | $\sqrt{3\,l}$ | $\sqrt{12\,l}$ | $\sqrt{48\,l}$ |

De verschillen $v$ tusschen twee metingen in heen- en teruggang leveren zoodoende *directe* contrôle op de gewenschte nauwkeurigheid, voor zoover deze afhankelijk is van de *toevallige fout*.

Voor het geval de systematische fout zich doet gelden, zal men, teneinde haar binnen de gestelde grenzen te houden, bij de meting de noodige voorzorgen in acht moeten nemen. Deze voorzorgen zijn:

*a.* voor *gebied* 1:

1°. het opnemen en in rekening brengen van de temperatuur;

2°. het bepalen van de afstanden onder constante spanning van den meetband;

3°. het met nauwkeurigheid richten van den meetband in de te meten lijn;

4°. het corrigeeren van eventuëele hellingen;

5°. het controleeren van de lengte van den meetband aan het begin en aan het einde van den meetdag.

*b.* voor *gebied* 2:

als bij de metingen in gebied 1 met uitzondering van het onder 2° vermelde en controleering van de lengte van den meetband, b.v. eenmaal per week, doch steeds, wanneer veranderingen worden vermoed;

*c.* voor *gebied* 3:

als bij de metingen in gebied 1 met uitzondering van het onder 1°. en 2°. vermelde, met dien verstande evenwel, dat bij abnormaal groote temperatuursverschillen daarmede rekening wordt gehouden. Controleeren van den meetband b.v. eenmaal per maand.

Voor nauwkeurige lengtemetingen wordt aanbevolen deze te verrichten bij bedekten hemel, waardoor de kans op onregelmatige schommelingen in de temperatuur gering wordt, zoodat een betrouwbare vaststelling der temperatuurscorrectie mogelijk is.

In § 17 werd reeds aangegeven, dat als foutenbronnen bij de meting van veelhoeken moeten worden onderscheiden de *invloeden van*:

**Nauwkeurigheid der Veelhoeksmeting**

*a.* de systematische fouten der lengtemeting;

*b.* de toevallige fouten der lengtemeting;

*c.* de centreerfouten van theodoliet en signalen;

*d.* de fouten der hoekmeting;

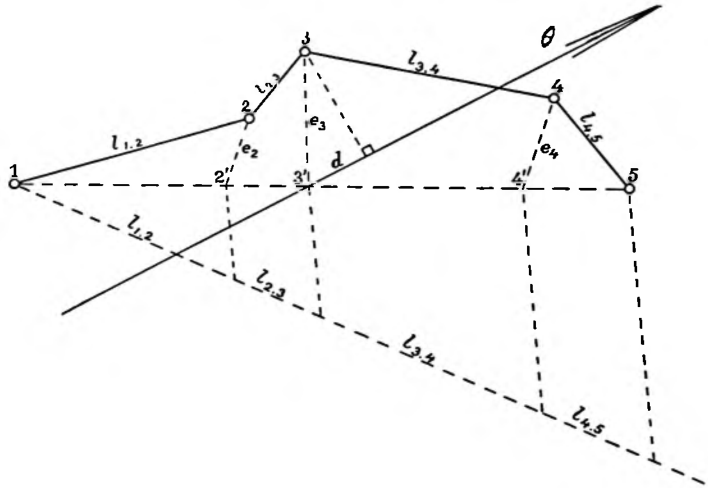
*e.* de fouten in de ligging van de eindpunten van den veelhoek.

Mede onder verwijzing naar paragraaf 17 wordt gememoreerd dat de veelhoeken als volgt worden vereffend:

1°. de sluitfout in de som van de hoeken wordt gelijkelijk over deze hoeken verdeeld;

2°. met de gecorrigeerde hoeken worden de sluitfouten in de coördinaten der eindpunten berekend, welke sluitfouten over de onderscheiden coördinatenverschillen worden verdeeld evenredig met de lengten der veelhoekszijden.

*a. De systematische fout in de lengtemeting*




Men verdeelt de verbindingslijn van begin- en eindpunt van den veelhoek in stukken, die zich verhouden als de zijden van den veelhoek, waarbij de stukken in dezelfde volgorde worden genomen (zie de figuur). De aldus ontstane punten 2′, 3′ en 4′ worden met de correspondeerende veelhoekspunten verbonden. In de richting van deze verbindingslijnen is de fout in de ligging van een veelhoekspunt, veroorzaakt door de systematische fout in de lengtemeting, maximum en te berekenen uit:

**Invloed van de systematische fouten in de lengtemeting**

$$(m^2)_a = a\, e^2. \tag{3}$$

In de richting loodrecht daarop is zij nul. Langs een willekeurige richting θ wordt zij gevonden uit:

$$(m^2)_a = a\, d^2$$

waarin $d$ de projectie is van $e$ op de richting θ.

Bij veelhoeken zonder onregelmatige knikken wordt als benadering aangenomen, dat de systematische fout in de lengtemeting zich alleen doet gevoelen *loodrecht op de verbindingslijn van begin- en eindpunt*. De lijnen $e$ staan dan n.l. nagenoeg loodrecht op deze verbindingslijn.

**Invloed van de toevallige fout**

*b. De toevallige fout in de lengtemeting* levert bij veelhoeken, niet te veel afwijkende van den gestrekten vorm, hoofdzakelijk een fout *in de lengterichting van den veelhoek*. De fout, die loodrecht op deze richting optreedt, kan worden verwaarloosd. Voor het midden van den veelhoek wordt de fout in de coördinaten gesteld op:

$$(m_l^2)\ b = \tfrac{1}{8}\ [l]\ b \tag{4}$$

aangenomen, dat de lengten der veelhoekszijden worden bepaald als het gemiddelde van twee metingen onder gelijke omstandigheden uitgevoerd. De invloed van deze fout is in het midden van den veelhoek het grootst.

*c.* en *d.* De invloed van de *centreerfouten* kan worden samengevat met de *fouten in de hoekmeting*. Is $c$ de middelbare fout in de centreering van theodoliet en signalen en $\mu$ de middelbare fout in de hoekmeting, zoo kan men de totale middelbare fout der hoekmeting bij benadering stellen op:

**Invloed van de resulteerende fout in de hoekmeting**

$$(m_\alpha^2) = \mu^2 + \frac{6c^2}{l^2}\,\varrho^2$$

waarbij $l$ de lengte van het kortste been van den hoek is.

Wat betreft deze resulteerende fout in de hoekmeting wordt aangenomen, dat zij zich op de nauwkeurigheid van de ligging van een punt doet gevoelen, *uitsluitend* in de dwarsrichting van den veelhoek. Deze aanname is *juist* voor een *gestrekten* veelhoek en geldt bij *benadering* voor een *niet gestrekten*.

Voor de middelbare fout in de dwarsrichting in het midden van een veelhoek met $n$-1 zijden wordt aangenomen:

$$q^2 = \left(\frac{\mu^2\, l^2}{\varrho^2} + 6c^2\right)\frac{(n^2+1)^2 - 4}{192\, n} \tag{5}$$

waarin $l$ de lengte van de kortste zijde voorstelt.

*e.* De invloed van de *fouten in de gegeven punten*.

Deze is voor het midden van den veelhoek te stellen op:

$$(m^2)_p = \tfrac{1}{2}\, m^2 \tag{6}$$

**Invloed van de fouten in de gegeven punten**

waarbij $m$ de middelbare fout in de gegeven punten is in de onderstelling dat de punten, die voor de oriënteering in begin- en eindpunt hebben gediend, gelegen zijn op afstanden, minstens gelijk aan de totale lengte $[l]$ van den veelhoek. De oriënteeringsrichting in het beginpunt moet een zoo klein mogelijken hoek insluiten met de richting naar het eindpunt; hoogstens mag deze hoek $100^g$ zijn. Hetzelfde geldt voor de oriënteeringsrichting in het eindpunt, ten opzichte van de richting naar het beginpunt. De formule (6) is een vrij grove benadering.

Op grond van de hierboven gegeven uiteenzetting komt men, uitgaande van de fouten in de gegeven punten tot de aanwijzing van de nauwkeurigheidseischen, in verband met de verschillende foutenbronnen.

Volgens (6) zal men voor de onderscheiden instructiegebieden komen tot bedragen van resp. 4,5, 18 en 72, binnen welke de kwadraten van de invloeden van de andere foutenbronnen moeten blijven, teneinde te bereiken, dat de veelhoekspunten *dezelfde* nauwkeurigheid bezitten als de punten van hoogere orde.

Volgens (4) moet dus:

$$\tfrac{1}{8}\,[l]\,b < \tfrac{1}{2}\,m^2 \qquad (7)$$

hetgeen beteekent, dat voor de drie gebieden $[l]$, de totale lengte van den veelhoek, met het oog op deze foutenbron, niet grooter mag zijn dan 2400 m.

Volgens (3) en (5) moet eveneens

$$a\,e^2 + q^2 < \tfrac{1}{2}\,m^2. \qquad (8)$$

Voor $e$ kan men bij niet al te onregelmatig gevormde veelhoeken de grootste van de loodrechte afstanden nemen, waarop de veelhoekspunten van de verbindingslijn van begin- en eindpunt verwijderd zijn.

Door middel van het nomogram, hetwelk voor het eerste lid van de formule (8) is bijgevoegd, wordt dan vastgesteld, welke nauwkeurigheid bij de centreering en hoekmeting moet worden gevorderd en tevens hoe groot de minimum zijdelengte en het maximum aantal punten — dus ook dat der zijden — mag zijn.

Het aantal zijden, vermenigvuldigd met de minimum zijdelengte, bepaalt dan de maximum toegelaten lengte voor den geheelen veelhoek. Zooveel mogelijk moet bij veelhoeksmeting gestreefd worden naar gelijke lengte der veelhoekszijden.

Is het door terreinsomstandigheden niet mogelijk de minimum lengte der zijden groot genoeg te kiezen, dan zal men de methode der hoofdveelhoeken bezigen onder gebruikmaking van een of meer tusschenpunten. Voor de toepassing van formule (5) moet dan voor de minimum zijdelengte die van den hoofdveelhoek genomen worden, terwijl ook voor $n$ het aantal hoofdveelhoekspunten wordt aangehouden (zie blz. 84, 5°.).

Aangezien de lengtemeting langs de samenstellende korte zijden geschiedt, brengt de onderscheiding van hoofd- en tusschenpunten voor de toepassing van (4) geen verandering. Ook het bedrag $e$ ondergaat geen verandering; dit bedrag blijft n.l. bepaald als behoorende bij het meest ongunstig gelegen punt van den veelhoek.

### MEETPUNTEN

**Inrichten van meetpunten**

Voor de bepaling van meetpunten in veelhoekszijden of in meetlijnen worden in volgorde van afdalende nauwkeurigheid drie werkwijzen onderscheiden:

*a.* inrichten der punten met den theodoliet;

*b.* „ „ „ „ een veldkijker;

*c.* „ „ „ „ het bloote oog.

Teneinde richtlijnen te vinden voor de toepassing dezer werkwijzen zullen we de lijn, waarin meetpunten worden ingericht aan een nadere beschouwing moeten onderwerpen.

De middelbare waarde van de fout in het midden van de lijn, veroorzaakt door de fouten der eindpunten is te stellen op $\tfrac{1}{2}\,m^2$, waarin $m$ de middelbare waarde van de fout in de gegeven punten is.

Onnauwkeurigheden in het inrichten geven fouten in de dwarsrichting van de lijn; de toevallige fout in de lengtemeting geeft fouten in hare lengterichting. Ter bereiking van de algemeene puntnauwkeurigheid zal men ook hier als eisch moeten stellen, dat het kwadraat van elk der beide fouten blijft beneden het bedrag van $\frac{1}{2}\, m^2$. Deze eisch is bepalend zoowel voor de keuze der hiervoor onder *a*, *b* en *c* genoemde methoden van inrichten, als voor de vaststelling van de nauwkeurigheid, waarmede de lengtemeting moet worden uitgevoerd.

Het is uiteraard niet mogelijk bij de bedoelde keuze scherpe grenzen aan te geven; in de landmeetkundige practijk kan evenwel de volgende tabel richting geven:

| methode | gebied 1 | gebied 2 | gebied 3 |
|---|---|---|---|
| *a* | 150—300 m | 300—600 m | 600—1000 m |
| *b* | 75—150 m | 150—300 m | 300— 600 m |
| *c* | beneden 75 m | beneden 150 m | beneden 300 m |

De tabel behoeft niet als bindend te worden beschouwd; zij heeft een informatorische waarde.

Bij meetlijnen kan als regel worden volstaan met eenmalige meting, tenzij contrôle op de meting om de een of andere reden gewenscht is. Zouden de terreinsomstandigheden zeer lange verbindingen noodig maken, dan rest steeds het middel om deze verbinding door een veelhoek tot stand te brengen.

**Loodlijnen**

Bij het gebruik van loodlijnen op een meetlijn houde men het volgende in het oog.

De maximum lengte van een met een prisma te bepalen loodlijn is gebonden aan de nauwkeurigheid, waarmede de rechte hoek met dit instrument kan worden uitgezet. Stelt men deze op 1',5 dan is de fout in den top der loodlijn:

$$\frac{1',5}{\varrho'}\, l. \qquad (1)$$

Bij een loodlijn ter lengte van 100 m wordt dit bedrag ongeveer 4,5 cm.

**De orthogonale en de voerstraalmethoden zijn gevallen van extrapolatie**

Tot nu toe kon de in den aanhef van deze paragraaf gestelde puntnauwkeurigheid gehandhaafd worden als gevolg van de omstandigheid, dat de meetmethoden steeds op *interpolatie* berustten. Bij het nemen van loodlijnen wordt men evenwel tot *extrapolatie* gedwongen, zooals dit ook bij de toepassing van de voerstraalmethode het geval is. Daardoor is men verplicht de eischen voor de algemeene puntnauwkeurigheid iets te matigen, m.a.w. toe te laten, dat voor punten op deze wijze bepaald de nauwkeurigheid iets geringer wordt.

Zou men de oorspronkelijke nauwkeurigheid willen behouden, dan zou van beide genoemde meetmethoden geen gebruik kunnen worden gemaakt en zou men geheel aangewezen zijn op de methode van het meetlijnenverband, welke een streng doorgevoerde interpolatiemethode is. De practijk maakt het echter niet mogelijk de orthogonale- en de voerstraalmethode uit te schakelen. De bezwaren der extrapolatie, die deze methoden aankleven, kunnen voor een deel worden ondervangen door een zelfde punt op meer wijzen te bepalen. Een strenge vereffening van de zoo verkregen waarden zou een zeer omslachtige berekening vorderen; de later te bespreken kaarteering kan hier evenwel de min of meer automatische vereffening tot stand brengen, welke iedere zorgvuldige kaarteering kenmerkt.

Onafhankelijk hiervan is het wenschelijk, de algemeene puntnauwkeurigheid voor detailpunten te stellen:

voor gebied 1 op 3,5 cm
voor gebied 2 op 7,0 cm
voor gebied 3 op 14,0 cm.

Deze bedragen zijn een weinig hooger dan die, welke in den aanvang zijn gesteld voor driehoeks-, veelhoeks- en meetpunten. In gebied 1 is dan voor het kwadraat van de lineaire afwijking van den top van een loodlijn beschikbaar een bedrag van $3{,}5^2 - 3^2 = 3{,}25$.

In verband met (1) moet dus:

$$\left(\frac{1{,}5\, l}{\varrho'}\right)^2 < 3{,}25.$$

Hieruit volgt voor $l$ een lengte van rond 40 m. Voor de gebieden 2 en 3 vindt men op overeenkomstige wijze voor $l$ resp. de lengten 80 en 160 m.

Een tweede begrenzing voor de lengte van de loodlijn wordt geleverd door de beschouwing van de systematische en toevallige fouten in de lengtemeting. De middelbare fout in een afstand $l$ is gegeven door de betrekking:

$$m_l^2 = a\, l^2 + b\, l.$$

Voor $a$ en $b$ de waarden invullende voor gebied 1, moet dus:

$$(2\, l^2 + 1{,}5\, l) < 3{,}25.$$

Hieruit volgt voor $l$ een bedrag kleiner dan 100 m; hetzelfde bedrag leveren ook de overige gebieden. De maximum toelaatbare lengte eener loodlijn is dus:

voor gebied 1 40 m
voor gebied 2 80 m
voor gebied 3 100 m

waarbij de loodlijn met een prisma is bepaald.

Bij de voerstraal-methode, waar de richtingen met den theodoliet, derhalve veel nauwkeuriger worden gemeten, wordt de maximum lengte der voerstralen voor alle gebieden 100 m.

**Verlengen van een meetlijn**

Het verlengen van een meetlijn is eveneens een geval van extrapolatie en komt neer op het uitzetten van een gestrekten hoek. Wordt een lijn $l$ verlengd over een stuk $\frac{l}{p}$, dan is het kwadraat van de fout in de dwarsrichting, als gevolg van de fouten in de gegeven punten:

$$\left\{\left(\frac{1+p}{p}\right)^2 + \frac{1}{p^2}\right\} m^2.$$

Hieruit blijkt, dat hier de fout in de gegeven punten zeer grooten invloed heeft. Deze werkwijze moet daarom zooveel mogelijk worden vermeden.

## SLUITFOUTEN

De sluitfouten der meetlijnen kunnen een inzicht geven in de bereikte nauwkeurigheid. Men kan het kwadraat van een sluitfout stellen op:

$$f_l^2 = a\, l^2 + b\, l + 2\, m^2 \tag{1}$$

**Sluitfouten der meetlijnen; indeeling in klassen**

in welke betrekking $m^2$ het kwadraat is van de algemeene punt-nauwkeurigheid en $l$ de lengte van de meetlijn. Zijn de meetlijnen in voldoend aantal aanwezig, zoo kunnen zij naar hunne lengten in klassen worden gerangschikt, terwijl naar hun aantal de klassegrenzen worden vastgesteld.

Stel het klasse-interval, om de gedachten te bepalen, op 25 m. Per klasse worden de sluitfouten gemiddeld, na eventueel nog ontdaan te zijn van de systematische fouten, veroorzaakt door kaartprojectie, temperatuur, enz.

Elke klasse levert een betrekking tusschen $a$, $b$ en $m^2$ volgens bovenstaande formule, waarbij voor $f_l$ het klasse-gemiddelde en voor $l$ de afstand voor het gemiddelde der klasse wordt ingevuld. Door toepassing van de methode der kleinste kwadraten kunnen dan de grootheden $a$, $b$ en $m^2$ worden berekend; men beschouwe daarbij $f_l$ als „gemeten" grootheid en geve daaraan een gewicht evenredig met het aantal meetlijnen per klasse. Van de zoo verkregen bedragen voor $a$, $b$ en $m$ is vooral dat van $m$ belangrijk. Indien de gestelde puntnauwkeurigheid inderdaad is bereikt, zal de aldus berekende waarde voor $m$ ongeveer gelijk moeten zijn aan de à priori gestelde en nagestreefde algemeene puntnauwkeurigheid. De bedragen voor $a$ en $b$ kunnen een inzicht leveren in de systematische en toevallige fout van de lengtemeting. Aan de verkregen resultaten mag evenwel geen groote beteekenis worden gehecht, omdat de middelbare fout in deze grootheden zelf een groote waarde kan hebben.

De toevallige fout in de lengtemeting kan ook op andere wijze worden gevonden; meestal heeft men hierin wel voldoende inzicht uit de verschillen in heen- en terugmeting van de meetlijnen. In dat geval kan men het eerste lid van de uit (1) volgende betrekking:

$$f_l^2 - b\, l = a\, l^2 + 2\, m^2$$

als „gemeten" grootheid beschouwen, waardoor men in het vraagstuk slechts $a$ en $m^2$ als onbekenden overhoudt.

### SLOTBESCHOUWING

De in deze paragraaf aangegeven middelen, die ten doel hebben de aangenomen algemeene puntnauwkeurigheid te verkrijgen, hebben betrekking op normale gevallen. Bij elk vraagstuk en bij elke constructie streve men er naar, het gewenschte doel zooveel mogelijk met normale oplossingen te bereiken.

De hiervoor gegeven aanwijzingen berusten deels op ervaring, deels op gemiddelde verwachtingen, afgeleid met behulp der foutentheorie. Dit leidde in de meeste gevallen tot een sterke generalisatie; men moet daarom niet uit het oog verliezen, dat in bepaalde gevallen afwijkingen van de als normaal geldende uitkomsten geconstateerd zullen worden.

Van zoogenaamde tolerantieformules is in deze handleiding *bewust* afstand gedaan. Waarborgen tegen onvoldoende werk leveren deze in geen geval, terwijl door het ontbreken van aanwijzingen voor de wijze van uitvoering der fundamenteele operaties, de waarnemer in het onzekere wordt gelaten wat betreft de inrichting van de eigenlijke meting.

Afdoende waarborg kan alleen gelegen zijn in het verantwoordelijkheidsgevoel van dengene, aan wien de uitvoering van het werk is opgedragen. Door een zorgvuldig toetsen van de gestelde eischen aan de mogelijkheden, die hem worden geboden, zal hij zelf een goed overwogen keuze moeten doen uit de aangegeven methoden.

Vorenstaande aanwijzingen hebben ten doel den uitvoerder richtlijnen te geven om tot rationeele werkmethoden te geraken. Hij houde in het oog, dat zoowel een tekort, als een teveel aan nauwkeurigheid onjuist moet worden geacht en dat in het algemeen een voortdurende critiek op de waarde van het eigen geleverde werk tot in onderdeelen noodzakelijk is om tot resultaten te geraken, die van economisch standpunt te verantwoorden zijn en binnen de hierdoor bepaalde grenzen landmeetkundig als de beste moeten worden aangemerkt.

## § 22. KAARTEERING

**Kaarteering in verband met de puntnauwkeurigheid**

Rekening houdende met de gestelde puntnauwkeurigheid, wordt na vaststelling van de coördinaten der daarvoor in aanmerking komende driehoeks-, veelhoeks-, meet- en scherp gemarkeerde detailpunten overgegaan tot het vaststellen der schalen voor de kaarteering van het terrein.

De navolgende schalen komen voor de kaarteering in aanmerking:

| | | | |
|---|---|---|---|
| voor gebied 1: | 1 : 250 | of | 1 : 500, |
| „ „ 2: | 1 : 500 | „ | 1 : 1000, |
| „ „ 3: | 1 : 1000 | „ | 1 : 2000. |

De keuze van de schaal is afhankelijk van de parcelleering van het voor te stellen terrein en de meer of mindere regelmatigheid der perceelen. Op de gekozen schaal wordt het opgemeten terrein in kaart gebracht op planformaat (100 × 67 cm).

Deze kaarteeringen hebben ten doel:

*a.* de uitgevoerde metingen te controleeren;
*b.* de grafische berekening der oppervlakken mogelijk te maken;
*c.* steeds te kunnen beschikken over de z.g. „groote kaarteering";
*d.* de bijhouding te vergemakkelijken;
*e.* de administratie op de meetcijfers te verlichten.

Bij de bijhouding zal er in de eerste plaats naar gestreefd moeten worden de resultaten der hermeting op het oorspronkelijke peil te handhaven. De geregelde terreinsveranderingen geven eenerzijds aanleiding tot verstoring van den meetkundigen grondslag, anderzijds tot een voortdurende toename van het aantal meetcijfers. Door de kaarteeringen op de hiervoor aangegeven schalen, worden de meetcijfers, die ten doel hadden de terreinpunten aan het coördinatensysteem te verbinden, voldoende bewaard. Zoolang de bij de hermeting gebezigde verzekerde punten niet gestoord zijn, kan bij de bijhouding van deze punten gebruik worden gemaakt. Zijn ze gestoord, zoo kan elk gekaarteerd en met zekerheid te identificeeren punt, dat voldoende scherp gemarkeerd is, als uitgangspunt eener nieuwe constructie gebezigd worden, welke evenwel volledig beantwoorden moet aan den eisch, de kaarteering op het oorspronkelijk peil te handhaven.

**Bijhouding met handhaving der puntnauwkeurigheid**

Zoo vormen de kaarteering en de kortgesloten maten gezamenlijk de blijvende resultaten der hermeting. Waar de keuze van de schalen, zooals reeds is vermeld, juist geschied is in verband met de gestelde puntnauwkeurigheid, blijft dus met een goede bijhouding der kaarteering, tevens de algemeene puntnauwkeurigheid gehandhaafd.

In alle gebieden vervult derhalve de grafische werkmethode een rol van fundamenteele beteekenis. Het is daarbij vanzelfsprekend, dat het een eisch voor een goede bijhouding is, zooveel mogelijk van vroegere meetlijnen gebruik te maken; met een goede kaarteering wordt evenwel bereikt, dat *niet al te star* behoeft te worden vastgehouden aan het vroegere meetlijnenstelsel, dat dikwijls zeer tijdroovende

berekeningen tot gevolg heeft, terwijl zorgvuldige uitpassingen op de op groote schaal vervaardigde kaart, o.a. bij uitzettingen, veelal tot een zeer practische oplossing van moeilijkheden kan voeren.

**Verkleining van de kaarteering langs fotografischen weg**

Naast de *kaarteering* worden in elk gebied bijblad en minuutplan vervaardigd, waarvoor de schalen 1 à 1000 en 1 à 2000 worden gebezigd. De aandacht wordt gevestigd op de in de practijk gebleken mogelijkheid om uit de kaarteering op groote schaal, 1 à 250 of 1 à 500, te komen tot het bijblad op de schaal 1 à 1000 of 1 à 2000 door fotografische verkleining. De bladen der kaarteering worden daartoe door den fototechnischen dienst te Amsterdam in de verkleinde schaal op filmplaten gebracht; met behulp van de kopieerspiegel worden deze verkleiningen ingepast op punten in de te vervaardigen kaart, welke punten vooraf op deze kaart worden gekaarteerd door middel van den coördinatograaf.

Aan de kopiëering van de filmplaten op het aangelegde plan 1 à 1000 moet groote zorg worden besteed. Om temperatuurswijziging tijdens de bewerking te voorkomen, wordt terzijde van den kopieerspiegel, ter hoogte van de ruimte tusschen de glasplaten van spiegel en parabolische vaas een electrische ventilator in werking gesteld. De practijk heeft aangetoond, dat met dit eenvoudige hulpmiddel de temperatuur afdoende op constante hoogte wordt gehouden.

In vele gevallen zullen de omstandigheden van terrein en gebiedsindeeling er aanleiding toe geven, dat het plan gekaarteerd wordt op de schaal, die ook voor het bijblad is aangewezen, n.l. op schaal 1 à 1000.

Op elk plan wordt niet meer dan een sectie of een gedeelte daarvan voorgesteld. Als bladscheiding worden zooveel mogelijk perceelgrenzen gekozen, waarvan verondersteld mag worden, dat ze weinig aan verandering zullen onderhevig zijn. De plans worden zooveel mogelijk Noord gericht.

**Aanleggen van plans**

Op daartoe gedane aanvraag worden aan het bureau van den landmeetkundigen dienst te Amsterdam de te kaarteeren bladen door middel van den coördinatograaf aangelegd. In de eerste plaats wordt gekaarteerd een net van vierkanten van 1 dm zijde, het z.g. *ruitennet*, hetwelk evenwijdig is aan de assen van het coördinatenstelsel. Behalve de hoekpunten van het ruitennet worden alle in coördinaten berekende punten op het plan voorgesteld.

**Planblaadje en coördinatenlijst**

Bij het verzoek tot het aanleggen van een blad worden medegezonden het daarbij behoorende *planblaadje* en een *lijst*, vermeldende de op het blad te kaarteeren punten met hunne coördinaten.

Op het *planblaadje* wordt in verkleinde maat het ruitennet van het aan te leggen blad voorgesteld; in normale gevallen, wanneer dit laatste geen overmatig aantal punten bevat, wordt aan het planblaadje zoodanige afmeting gegeven, dat de zijden der vierkanten 25 mm bedragen.

Het nummer van elk te kaarteeren punt wordt op het planblaadje vermeld in de ruit, waarin het punt gelegen is; men dient er echter rekening mede te houden, dat de afmeting van het plan niet meer dan 100 × 67 cm bedraagt, zoodat het ter voorkoming van teleurstelling aanbeveling verdient de uiterst gelegen punten op het planblaadje te kaarteeren, ten einde zich vooraf te verzekeren, dat de voorstelling op het werkplan mogelijk is.

Langs de randen van het planblaadje worden bij de ruitlijnen de daarbij behoorende coördinatencijfers gesteld. Tevens wordt daarop aangegeven de stand van het ruitennet; men kiest daartoe twee ruitlijnen als *assen*, waarvan het snijpunt zooveel mogelijk in het midden van het papier is gelegen. De eene as snijdt de beide

lange, de andere de beide korte zijden van het blad; de afstanden van drie dezer snijpunten tot de naastbij gelegen hoekpunten van het blad worden op het planblaadje vermeld.

Voor de *lijst* van coördinaten kan worden gebezigd het hermetingsformulier n°. 6. In verband met den bouw van den coördinatograaf zal men, wat betreft de volgorde, waarin de punten zullen worden gekaarteerd, onderscheid moeten maken voor de kwadranten, waarin zij zijn gelegen. Bevat het plan punten, gelegen in het eerste kwadrant, zoo zal men de kaarteering aanvangen in de reeks van ruiten, evenwijdig aan de $X$-as, die de punten met de grootste ordinaten bevat; deze punten worden dan ruit voor ruit gekaarteerd. Na afwerking van deze ruitenreeks, zal men de kaarteering in tegengestelden zin vervolgen voor de punten in de aangrenzende ruitenreeks en zoo vervolgens. Voor het derde kwadrant volgt men dezelfde werkwijze.

**Volgorde der te kaarteeren punten**

Voor het tweede en vierde kwadrant wordt de kaarteering op de doelmatigste wijze uitgevoerd door ze aan te vangen in de ruitenreeks, evenwijdig aan de $Y$-as, waarin de punten met de grootste abscissen zijn gelegen; deze reeks zal men weder geheel afwerken, daarna in tegengestelden zin de naastbij gelegen reeks in behandeling nemen en zoo voortgaan tot alle evenwijdig aan de $Y$-as gelegen ruitenreeksen zijn afgekaarteerd.

Wanneer de aanvrager bij het opmaken van de coördinatenlijst de hierboven aangegeven volgorde in acht neemt, dan bevordert hij hiermede de vlotte bewerking op den coördinatograaf en werkt er tevens aan mede, dat het mechanisme van het toestel zoo min mogelijk wordt geschaad.

De coördinatograaf bevat twee *grondschalen*, te weten 1 à 1000 en 1 à 2500. Wanneer kaarteering op een andere schaal noodig is, zullen de coördinaten der te kaarteeren punten een omwerking moeten ondergaan; zoo zal men voor een kaarteering op schaal 1 à 500 de coördinaten met twee moeten vermenigvuldigen om de grondschaal 1 à 1000 te kunnen benutten; voor de schaal 1 à 2000 worden de oorspronkelijke coördinaten door twee gedeeld.

Op analoge wijze wordt gehandeld met schalen, die zich beter aanpassen bij de grondschaal 1 à 2500.

Wanneer de punten met hunne coördinaten vermeld zijn op het kaartformulier en deze niet behoeven te worden omgewerkt, zoo kunnen in plaats van de coördinatenlijsten, de kaarten zelve worden toegezonden, gerangschikt in de aangegeven volgorde.

**Kaartformulier**

Wat betreft de detailkaarteering zij opgemerkt, dat het gebruik van technische hulpmiddelen, zooals de *detail-* en de *poolcoördinatograaf* bij de kaarteering groote diensten kunnen bewijzen. Zij leveren zeer nauwkeurige resultaten, geven een besparing van tijd, ontgaan, wat de poolcoördinatograaf betreft, de coördinatenberekening van de eindpunten der onderscheiden voerstralen, houden het teekenpapier in reinen toestand en beperken de beschadiging van het papier, als gevolg van kaarteerpunten tot een minimum. Gebruik van deze hulpinstrumenten is daarom ten zeerste aan te bevelen.

**Technische hulpmiddelen bij de kaarteering**

Uit het voorgaande is gebleken, dat de technische waarde van het gekaarteerde plan en het behoud van die waarde voor het belangrijkste deel wordt beheerscht door *het papier*. Het materieel van dit plan moet daarom aan de hoogste eischen voldoen; het moet vervaardigd zijn uit de beste grondstoffen, waardoor niet alleen zijn duurzaamheid is verzekerd, maar tevens de waarborg wordt verkregen, dat

**Eischen te stellen aan het papier**

het zoo weinig mogelijk aan verandering onderhevig is. In verband met laatstgenoemden eisch kan het gebruik van alluminiumplaten, beiderzijds beplakt met teekenpapier, in bepaalde gevallen een punt van overweging uitmaken.

**Fotogrammetrische kaart**

De *fotogrammetrie* levert een kaart met een puntnauwkeurigheid, welke ongeveer gelijk is te stellen met het voor gebied 3 vastgestelde bedrag. In dit gebied kan dus het hulpmiddel der fotogrammetrie worden ingeschakeld, indien de aard van het terrein er overigens aanleiding toe geeft. Het is duidelijk, dat alleen dan de fotogrammetrie tot een economische oplossing leidt, indien de afscheidingen in het terrein zichtbaar zijn en dus het meerendeel der grenzen uit de foto kan worden gevonden.

Het waterland en ook het polderland leent zich in de eerste plaats voor deze werkwijze. Waar echter, zooals eerder is uiteengezet, het *resultaat* eener hermeting bestaat uit de kaart, aangevuld met de kort gesloten maten, zal alleen de fotogrammetrie kunnen worden toegepast, indien de kortgesloten maten kunnen worden gemist of wel in voldoende mate in het bestaande archief aanwezig zijn.

## § 23. OPPERVLAKTE-BEREKENING

Stelt men de middelbare fout, waarmede op een kaart op schaal 1 à $S$ een afstand wordt uitgepast, $\alpha\ S$ cm, zoo volgt hieruit, dat als kwadraat van de middelbare fout in de oppervlakte 0 van een rechthoek met een lengte $l_1$ en een breedte $l_2$ hectometer, kan gelden:

$$m_0^2 = (l_1^2 + l_2^2)\ \alpha^2\ S^2 \qquad (m_0 \text{ in ca}).$$

Is de verhouding van lengte en breedte $p$, dan is de betrekking te schrijven als:

$$m_0^2 = \alpha^2\ S^2\ O\left(p + \frac{1}{p}\right). \qquad (O \text{ in ha}).$$

Voor het *gemiddelde* van 2 dergelijke bepalingen wordt de middelbare fout gevonden uit:

**Nauwkeurigheid bij grafische berekening der oppervlakten**

$$m_{0\ \text{gemiddelde}}^2 = \tfrac{1}{2}\ \alpha^2\ S^2\ O\left(p + \frac{1}{p}\right). \qquad 1)$$

De middelbare waarde van het *verschil* tusschen 2 bepalingen kan worden gesteld op:

$$m_{0\ \text{verschil}}^2 = 2\ \alpha^2\ S^2\ O\left(p + \frac{1}{p}\right). \qquad 2)$$

Deze formules betreffen de nauwkeurigheid van de grafische berekening van een oppervlakte met terzijdestelling van den invloed van de fouten in de coördinaten van de punten, als gevolg van de meting en de kaarteeronnauwkeurigheid. Zij geven dus, wat men de *inwendige nauwkeurigheid* zou kunnen noemen.

Om ook in de andere foutenbronnen eenig inzicht te verkrijgen moet worden nagegaan, hoe groot de onnauwkeurigheid in de lengte van een gekaarteerde lijn is. Deze is afhankelijk van de nauwkeurigheid in de ligging van de beide eindpunten in de kaart. Hierop is van invloed de algemeene puntnauwkeurigheid $d$ cm en de fout in de kaarteering van een dergelijk punt, die gesteld wordt op $\beta\ S$ cm. Men kan dus voor de totale middelbare fout in de ligging van een gekaarteerd punt aannemen:

$$m_k^2 = d^2 + \beta^2\ S^2.$$

Hieruit zou dan kunnen volgen voor de m.f. in de lengte van een gekaarteerde lijn $m_l^2 = 2\, m_k^2$, daarbij aannemende dat er geen correlatie bestaat tusschen begin- en eindpunt der lijn.

Het is duidelijk, dat indien het een afstand betreft, die als kortgesloten maat direct gemeten is, de nauwkeurigheid in het gekaarteerde resultaat aanmerkelijk gunstiger zal moeten zijn en niet veel zal kunnen verschillen van een bedrag als $\beta^2\, S^2$. Indien de lijn niet direct gemeten is, zal in de practijk een volkomen zelfstandige bepaling van de eindpunten zelden plaats vinden. Meestal is er wel een tamelijk direct verband in de meting aanwezig, als bijv. loodlijn op een zelfde meetlijn. Hierdoor zal echter de nauwkeurigheid in de lengte van een gekaarteerde lijn slechts met groote benadering in een formule zijn voor te stellen. In elk geval is over den invloed van de kortgesloten maten weinig te zeggen, omdat de bijdrage, die deze geleverd hebben voor de nauwkeurigheid van de kaarteering niet op concrete wijze is aan te geven. Wel staat vast, dat het bedrag van 2 $m_k^2$ als het ongunstigste geval moet worden beschouwd, dat zich in de practijk zelden zal voordoen.

**Nauwkeurigheid van een gekaarteerde lijn**

Het andere grensgeval is dan, dat de afstand direct gemeten is, waarvoor men zou kunnen aannemen:

$$m_l^2 = a\, l^2 + b\, l + \beta^2\, S^2 \qquad (l \text{ in hm, } m_l \text{ in cm})$$

waarin $a$ en $b$ de constanten der lengtemeting zijn.

Door toepassing van de voortplantingswet der fouten vindt men hiermede voor den invloed van de *meet-* en *kaarteerfouten* in de grensgevallen:

$$\text{I.} \qquad m_0^2 = 4\, a\, O^2 + b\, O^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) + O\, \beta^2\, S^2 \left(p + \frac{1}{p}\right)$$

$$\text{II.} \qquad m_0 = 2\, (d^2 + \beta^2\, S^2)\; 0 \left(p + \frac{1}{p}\right)$$

$m_0$ in ca, 0 in ha, $d$ en $\beta\, S$ in cm.

I is het gunstigste geval, II het ongunstigste.

Het lijkt niet ongewettigd voor verdere beschouwingen aan te houden het gemiddelde dezer uitdrukkingen. Voegt men hierbij het bedrag der inwendige nauwkeurigheid, dan kan voor de totale middelbare fout gelden:

$$M_0^2 = 2\, a\, O^2 + \tfrac{1}{2}\, b\, O^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) + O \left(p + \frac{1}{p}\right)$$

$$\{d^2 + 1{,}5\, \beta^2\, S^2 + 0{,}5\, \alpha^2\, S^2\}. \qquad 3)$$

waarbij dan gerekend is, dat de uitkomst verkregen wordt als het gemiddelde van 2 bepalingen. $O$ is in ha, $M_0$ in ca, $d$, $\alpha$ en $\beta$ zijn in cm uitgedrukt.

Voor $\alpha$ en $\beta$ zal nu verder worden aangenomen 0,014 cm ($\alpha^2 = \beta^2 = 2.10^{-4}$). Dit geeft aanleiding tot de volgende tabel:

**Tabel grafische berekening**

| | | gebied 1 | | gebied 2 | | gebied 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | S = | 250 | 500 | 500 | 1000 | 1000 | 2000 |
| 0 = 0,01 ha | 0 1 | 0,9 | 1,5 | 1,7 | 3,0 | 3,4 | 6,0 |
| | p 4 | 1,3 | 2,2 | 2,5 | 4,4 | 5,0 | 8,8 |
| 0 = 1 ha | p 1 | 9 | 15 | 18 | 31 | 36 | 61 |
| | p 4 | 13 | 22 | 26 | 44 | 52 | 88 |

Uit de tabel volgt, dat de gunstigste schaal voor elk der gebieden bij de grafische berekening de oppervlakten geeft met een nauwkeurigheid, die in het algemeen voldoende moet worden geacht, zeer bijzondere omstandigheden daargelaten. Per 100 ca is deze respectievelijk ongeveer 1,1; 2,1 en 4,2 ca.

Wanneer de perceelen overwegend regelmatig van vorm zijn, de meting overzichtelijk is en van kortgesloten maten voor de berekening kan worden gebruik gemaakt, zoo kan wat de oppervlakteberekening betreft, de minder gunstige schaal worden aanvaard.

Formule 2 levert een practisch houvast bij de beoordeeling van de toelaatbaarheid van verschillen tusschen 2 bepalingen; $\alpha^2$ kan hier weer op $2.10^{-4}$ worden aangenomen.

Voor verschillen van planimeteraflezingen kan de formule eveneens worden aangehouden. Bij gebruik van een nauwkeurige schijfpoolplanimeter, voorzien van de „Loupe Saphir" mag worden aangenomen, dat in het algemeen gesproken, de nauwkeurigheid der bepaling van het gemiddelde uit 2, zoonoodig 4 aflezingen met een andere grafische methode op een lijn staat.

Bindende raadgevingen ten aanzien van de oppervlakteberekening kunnen niet worden gegeven. Daarvoor zijn de eischen, die aan de nauwkeurigheid worden gesteld te zeer verschillend. De formules beoogen slechts een leiddraad te zijn om eenigermate op grond van verstandelijke overwegingen een keuze te doen. De groote verscheidenheid in vorm van de perceelen maakt bovendien het onder één formule brengen van alle gevallen tot een onmogelijkheid.

De gebruiker zal derhalve op grond van eigen inzicht en ervaring moeten handelen. Men hoede zich voor te overdreven eischen aan de nauwkeurigheid van een oppervlakte te stellen, omdat meestentijds andere factoren, zooals bijv. de frontbreedte van een perceel grooter invloed op de prijsbepaling hebben dan een onnauwkeurigheid van een enkel percent in zijn oppervlakte.

**Oppervlakteberekening, gedeeltelijk grafisch en uit meetgetallen**

Ofschoon uit het bovenstaande is gebleken, dat de grafische methode voldoende resultaten levert, kan in de gevallen, dat zij voor de oppervlakteberekening niet nauwkeurig genoeg wordt geacht, de half-grafische methode worden gevolgd, of de bepaling geheel uit meetgetallen worden verricht.

De volgende opmerkingen kunnen daarbij tot richtsnoer dienen.

In het algemeen zal men voor perceelen van geringe oppervlakte de factoren voor de berekening zooveel mogelijk uit het veldwerk overnemen of afleiden.

Bij regelmatig begrensde perceelen, waarvan de breedte in vergelijking met de lengte gering is, verdient het aanbeveling de breedte steeds aan het veldwerk te ontleenen. Bij langgerekte perceelen, ingesloten door een kromlijnige begrenzing, kan men in vele gevallen met vrucht gebruik maken van een z.g. harpplanimeter.

Bezigt men voor de berekening der perceelen den poolplanimeter, zoo houde men in het oog, dat de met dit instrument bereikbare nauwkeurigheid toeneemt, naarmate de verhouding van den inhoud der figuur tot haren omtrek grooter is.

Lange, smalle perceelen zullen dus slechts met een geringen graad van nauwkeurigheid kunnen worden berekend.

**Formulier n°. 8**

Voor de inhoudsberekening wordt gebruik gemaakt van het *formulier berekening* n°. 8. Als contrôle op de berekening zal deze door twee personen worden uitgevoerd. Kan de berekening voor een groot deel uit meetgetallen geschieden, dan zullen beide berekeningen slechts zeer geringe verschillen mogen opleveren, welke zullen wisselen, naarmate men minder of meer meetgetallen ter beschikking heeft.

Bij voldoende overeenstemming tusschen twee berekeningen wordt het ge-

middelde in kolom 5 van het formulier 8 ingevuld. Voldoet de berekening niet aan de gestelde foutengrenzen, dan worden de verschillen opgespoord en verbeterd.

Het totaal der grootten van de op een blad voorkomende perceelen moet in overeenstemming worden gebracht met den inhoud van het geheele perceelencomplex van het blad.

Deze inhoud wordt berekend uit de coördinaten der hoekpunten van den omtrek, welke coördinaten zoo noodig door uitpassing kunnen worden verkregen. De berekening wordt uitgevoerd in formulier n°. 9 en geschiedt op twee wijzen:

**Formulier n°. 9**

1. volgens de formule:

$$I = \tfrac{1}{2} \Sigma Y_n (X_{n+1} - X_{n-1})$$

2. volgens de formule:

$$I = \tfrac{1}{2} \Sigma X_n (Y_{n-1} - Y_{n+1})$$

De uitkomst van 1. en 2. mag geen verschil opleveren.

Ook kan het totaal oppervlak worden bepaald door berekening uit de ruiten, door n.l. de bekende inhoud der volle ruiten te vermeerderen met het berekende oppervlak van de gedeelten.

Het verschil tusschen de oppervlakte, berekend in formulier n°. 9, en het totaal der perceelgrootten, berekend in formulier n°. 8, wordt ten slotte over deze laatste evenredig verdeeld, waarmede de definitieve grootte van ieder perceel wordt vastgesteld.

## § 24. TOELICHTINGEN BIJ DE REKENVOORBEELDEN

De voorbeelden: formulier 12 blz. 1 t/m 4, formulier 13, blz. 1 t/m 4, formulier 14, formulier 19, formulier 20 blz. 1 t/m 3, formulier 21 blz. 1 en formulier 22 blz. 1 hebben betrekking op één samenhangende meting. Het betreft hier de bepaling van de punten, genoemd B, C, E en N. Teneinde de voorbeelden zoo leerzaam mogelijk te maken, zijn er een zoo groot mogelijk aantal bijzonderheden in verwerkt. Voor de bepaling van de punten *B* en *C* werden op den toren van Steenderen (Steenderen I) voorwaartsche richtingen naar deze punten gemeten in het Stationspunt Vastlegging V. Bij de meting van deze voorwaartsche richtingen kon het centrum van C worden ingesteld; voor B was dit niet mogelijk en werd gericht op een bij B excentrisch opgesteld signaal.

De resultaten van de meting vindt men aangegeven in form. 13 kolom 3 als centrisch gemeten richtingen. De excentrisch gemeten richtingen zijn in kolom 4 vermeld. Na berekening van de benaderde coördinaren van de punten zijn in form. 14 de overgangen berekend. De gegevens hiervoor werden ontleend voor wat betreft het punt Steenderen I Vastlegging V aan het „Register van Vastleggingen"; die voor het punt B werden door meting verkregen. Vier richtingen in B zijn gemeten in het centrum, n.l. de eerste vier van form. 13 blz. 2; drie in een excentrisch punt, gelegen op een afstand van 22,3334 m uit het centrum; deze afstand is vermeld in de kolom „Opmerkingen" van form. 13 blz. 2. In deze serie is tevens de richting naar het centrum opgenomen. Het signaal, waarop vanuit Steenderen I Vastl. V is gericht, was op een afstand van 0,692 m van het cenrum gelegen (zie eveneens „Opmerkingen"). Afzonderlijk werd de richting vastgesteld door in B centrum de hoek tusschen de richting naar het punt Olburgen (gegeven in R.D.) en die naar het signaal te meten (zie onderaan form. 13/2 kol. 3).

Met behulp van de benaderde coördinaten van B, werd in form. 12/1 afd. 9 het benaderde argument uitgerekend, waarna de richting naar B signaal kon worden

georiënteerd, zie kol. 8, form. 13/2. Ten blijke, dat het hier telkens benaderde richtingen zijn, werden de op deze berekening betrekking hebbende getallen in form. 13 tusschen haakjes geplaatst.

In formulier 12 werden uitgerekend:

blz. 1, afd. 1 en 2: de argumenten in Steenderen I naar Doesburg I en Brummen II ten behoeve van de oriënteering van de voorwaartsche richtingen, zie form. 13/1 kol. 2 en voor de berekening van de overgangen naar Vastlegging V, zie Form. 14/1, 2e en 3e kolom;

blz. 1, afd. 3: de coördinaten van Steenderen I Vastl. V, uit de gegeven richting en afstand, door het formulier in omgekeerde richting toe te passen;

blz. 1, afd. 4 en 5: de afstanden Vastl. V—Doesburg I en Vastl. V—Brummen II, noodig voor de berekening van de overgangen form. 14/1, 2e en 3e kolom;

blz. 1, afd. 6 t/m 11: benaderende argumenten in B, noodig voor de vereffening van B, overgebracht naar de kolom $\psi'$ in form. 19/1 afd. 1; bovendien in afd. 9, 10 en 11, form. 12/1 tevens de afstanden naar de gegeven punten voor de berekening van de overgangen in form. 14/1, kolom 4, 5 en 6;

blz. 1, afd. 12: de benaderde coördinaten van B signaal uit die van B (omgekeerde toepassing van het formulier) uit de gemeten afstand 0,692 en de in form. 13/2 berekende benaderde oriënteering 188$^g$, 7068;

blz. 1, afd. 13: een richting en afstand, noodig voor de berekeningen in form. 14/1 kolommen 7 en 8;

blz. 1, afd. 14: een afstand voor berekening in form. 14/1 kol. 7;

blz. 3, afd. 15: een afstand voor berekening in form. 14/1 kol. 9.

De andere in form. 12 voorkomende berekeningen vertoonen geen bijzonderheden. Zij leveren de coëfficiënten $a$ en $b$, benevens de benaderde of de definitieve argumenten; bij berekening van de benaderde argumenten is het punt tusschen haakjes geplaatst. Bij uitgebreider driehoeksmetingen verdient het aanbeveling om de berekening der definitieve argumenten in een afzonderlijk stel formulieren 12 uit te voeren.

Thans kunnen in form. 14 alle overgangen uitgerekend worden. Deze worden in de kolom 5 van formulier 13 ingeschreven. Formulier 13/1 eischt nog eenige toelichting. De overgangen van Vastlegging V naar centrum worden verkregen door het teeken van de in form. 14/1 berekende overgangen van centrum naar Vastlegging V om te keeren. De richting naar B signaal krijgt *twee* overgangen. Eerst de overgang + 0,0099 (teekenomkeering, zie form. 14). Men krijgt dan de richting in Vastl. V naar B. Deze is tusschen haakjes in kolom 4 ingevuld. Daarna de overgang van Vastlegging V naar centrum (+ 0,0364, teekenomkeering form. 14). De kolom 3 kan nu geheel ingevuld worden.

Bij de hier gevolgde methode is voor de berekening van de overgangen steeds gebruik gemaakt van den sinusregel en zijn geen benaderingsmethoden toegepast, die steeds overwegingen noodig maken, of zij wel een voldoend nauwkeurig resultaat geven. Het is dan echter noodig in sommige gevallen een berekening van de coördinaten van enkele punten, zooals van punt B signaal, vooraf te doen gaan.

De vereffening volgt nu in de formulieren 19, 20, 21 en 22. Voor het punt B is aangenomen, dat de richtingen gelijk gewicht hebben. Gebruikt is dus formulier 19. De grootheden worden uit form. 13 overgenomen, de grootheden $a$, $b$ en $\psi'$ zijn in form. 12 berekend. De bijzonderheid is hier, dat de gemeten richtingen over twee series zijn verdeeld. Deze series krijgen elk een oriënteering; ze worden afzonderlijk gereduceerd.

**Enkele puntsbepaling; berekening van het punt B uit buiten- en binnenrichtingen van gelijk gewicht**

In punt E zijn hoeken gemeten. Omdat ongelijke gewichten aangenomen zijn, is hier form. 20 gebezigd. De gewichten $g$ zijn vastgesteld met behulp van het nomogram voor de formule:

**Berekening van het punt E uit in dit punt gemeten hoeken van ongelijk gewicht**

$$\frac{196}{g} = m^2 + \frac{d'}{l^2}\, e^2$$

$m$ en $d$ zijn aangenomen op resp. $5^{cc}$ en 3 cm. Het getal 0,7 (derde getal in de kolom $g$) is uit de beide erbovenstaande getallen gevonden volgens:

$$\frac{1}{0{,}7} = \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}7}.$$

Voor de bepaling van het gewicht van een hoek uit de gewichten van de beenen is in de bijlage een nomogram aanwezig.

Er is met hoeken verder gerekend. Het hierbij behoorende form. 13 is dan ook dienovereenkomstig ingevuld.

**Dubbele puntsbepaling; berekening van de punten C en N uit buiten- en binnenrichtingen van ongelijk gewicht**

De punten $C$ en $N$ zijn als dubbelpunt vereffend, aangenomen zijn ongelijke gewichten. De formulieren 20/2 en 20/3 worden ingevuld tot en met de kolom voor $g$, waarbij kolom $s$ kan worden overgeslagen. Uitgaande van deze gegevens wordt nu form. 21 ingevuld. Hier worden de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen uitgerekend, waarna in form. 22 de oplossing dezer vergelijkingen geschiedt. De uitkomsten worden overgenomen in de formulieren 20/2 en 20/3, waarna volgt de berekening van de grootheden $\triangle\, \psi$ en $V$. Men lette er op, dat de wederzijdsche richting twee correcties krijgt. In de kolom $a \triangle X$, form. 20/2 is het bedrag — 39,5 verkregen als het product van $a = + 124{,}1$ en $\triangle X = - 0{,}31861$. Het bedrag + 36,6 is afkomstig uit form. 20/3 als het product van $a = - 124{,}1$ en $\triangle X = - 0{,}29473$. Het bedrag — 39,5 uit form. 20/2 is eveneens geboekt in form. 20/3. Analoog is gehandeld voor de bedragen $b \triangle Y$. De 4 bedragen $a \triangle X$, $b \triangle Y$ geven $\triangle \psi = + 88{,}3$. Voor beide punten wordt verder op de gewone wijze $[gvv]$ uitgerekend. Samenstelling van deze bedragen levert 728,5, een bedrag, dat ongeveer moet kloppen met het bedrag 718, voor $[gvv]$ in form. 22 gevonden.

De berekeningen aan den voet der kolommen $a \triangle X$, $b \triangle Y$ en $\triangle \psi$ zijn contrôles op de optellingen: $[\triangle \psi] = + 95{,}9 = + 5{,}4 + 90{,}5$. Het bedrag + 95,9 vermeerderd met — 70 = $[ff]$ levert + 25,9 = $[v + \triangle 0]$. Onder aan kolom $g\,(v + \triangle 0)$ is vermeld $[g\,(v + \triangle 0)] = [g] \triangle 0 = + 123{,}6$. Hieruit volgt dan $\triangle 0 = + 6{,}2$, waaruit men vindt de definitieve oriënteering $0 = 0' + \triangle 0 = 35{,}2939 + 6 = 35{,}2945$. Dit bedrag moet dan kloppen, behoudens afrondingsfouten met de in form. 13/3 berekende oriënteering, eveneens 35,2945. Voor het andere punt geldt hetzelfde.

Van alle punten zijn daarna in form. 12 de definitieve richtingen berekend en zijn de formulieren 13 op de gebruikelijke wijze verder bewerkt.

**Aansluiting van een vereffend driehoeksnet a. aan 2 punten (gelijkvormigheidstransformatie)**

De punten $B$, $C$ en $E$ van het driehoeksnet zijn de bovenbepaalde punten, het punt $A$ is het punt Steenderen I. In het voorbeeld van de aansluiting aan twee punten is aan de punten $A$ en $B$ aangesloten. Bij het voorbeeld van de overbepaalde affine aansluiting is aangesloten aan de punten $A$, $B$, $C$ en $E$.

*b. aan 4 punten (overbepaalde affine aansluiting)*

Het voorbeeld van de grafische vereffening staat los van de hierboven besproken voorbeelden. De gegevens hiervoor zijn ontleend aan M. de Vos, Leerboek der lagere geodesie, blz. 416 e.v. punt 8.

**Omrekenen van loodlijnen op een andere meetlijn**

Het omrekenen van loodlijnen op een andere meetlijn, waarvan eveneens een voorbeeld is bijgevoegd, kan uitgevoerd worden in het formulier 27, aansluiting aan 2 punten, gelijkvormigheidstransformatie. Het is in de practijk niet noodig de teekening in het formulier over te nemen. Dit geschiedde hier om plaatsruimte te sparen.

**Lokale driehoeksmeting; controle van een torencentrum**

Het voorbeeld van de lokale driehoeksmeting behandelt de contrôle van een torencentrum. Vastlegging I is hier het „Coördinatenpunt" *K* en Pijler het „Richtingspunt" R. In den verzamelstaat zijn in de kolommen 1 en 2 de gemeten richtingen ingeschreven. Op blz. IV is uitgerekend de logarithme van de lengte van de basis in stereografische projectie. In afd. 1, blz. II worden de driehoeken berekend. In den driehoek Pijler, Basis N, Basis Z is de som van de hoeken op 200*g* gebracht, waartoe aan ieder der hoeken een gelijke correctie is gegeven. Eenzelfde correctie is aan de hoeken aan de basis in de andere driehoeken aangebracht, waarna in den verzamelstaat de richtingen dienovereenkomstig gecorrigeerd worden. In afd. 1 worden de onbekende driehoekszijden berekend, in afdeeling 2 alle richtingen in één stelsel georiënteerd met de richting „Richtingspunt-verre punt" als nulrichting. In afdeeling 3 wordt de coördinaat $\xi$ van *K* (Vastlegging I) in het hulpstelsel berekend op de wijze van een veelhoeksberekening.

In afdeeling 5 zijn de coördinatenverschillen van het oude centrum en Vastlegging I berekend, waarna de coördinaten $X_k$ en $Y_k$ in afd. 4 worden gevonden. Men rekent hier nu uit de richting $\overline{KP}$ en de afstand *KP* en ten slotte met behulp van $\xi$ op de gebruikelijke wijze de overgang *d* en daaruit de richting $\overline{RP} = \omega$. In afdeeling 2 worden de richtingen georiënteerd. Op de wijze van een veelhoeksberekening worden in afd. 5, uitgaande van de coördinaten van Vastlegging I, de coördinatenverschillen van de stationspunten met het oude centrum bepaald. Wegens de geringe verschillen kon de nieuwe stang identiek met de oude worden verklaard. In afdeeling 6 zijn poolcoördinaten t.o.v. het centrum berekend. De centreeringsuitkomsten worden op blz. I van het formulier ingevuld.

Tabel voor de bepaling van de correctie $\triangle d$ in de berekening van den overgang $d = d' + \triangle d$

| d' | 0c | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0g | | | | | correctie $\triangle d$ | | | | | |
| 1 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.1 | 1.4 | 1.7 | 2.0 | 2.4 | 2.8 |
| 2 | 3.3 | 3.8 | 4.4 | 5.0 | 5.7 | 6.4 | 7.2 | 8.1 | 9.0 | 10.0 |
| 3 | 11.1 | 12.3 | 13.5 | 14.8 | 16.2 | 17.7 | 19.2 | 20.9 | 22.6 | 24.4 |
| 4 | 26.4 | 28.4 | 30.5 | 32.8 | 35.1 | 37.6 | 40.1 | 42.8 | 45.6 | 48.5 |
| 5 | 51.5 | 54.7 | 58.0 | 61.4 | 65.0 | 68.6 | 72.5 | 76.4 | 80.5 | 84.8 |
| 6 | 89.2 | 93.7 | 98.4 | 103.3 | 108.3 | 113.5 | 118.8 | 124.3 | 130.0 | 135.8 |
| 7 | 141.8 | 148.0 | 154.4 | 160.9 | 167.7 | 174.6 | 181.7 | 189.0 | 196.5 | 204.2 |
| 8 | 212.1 | | | | | | | | | |

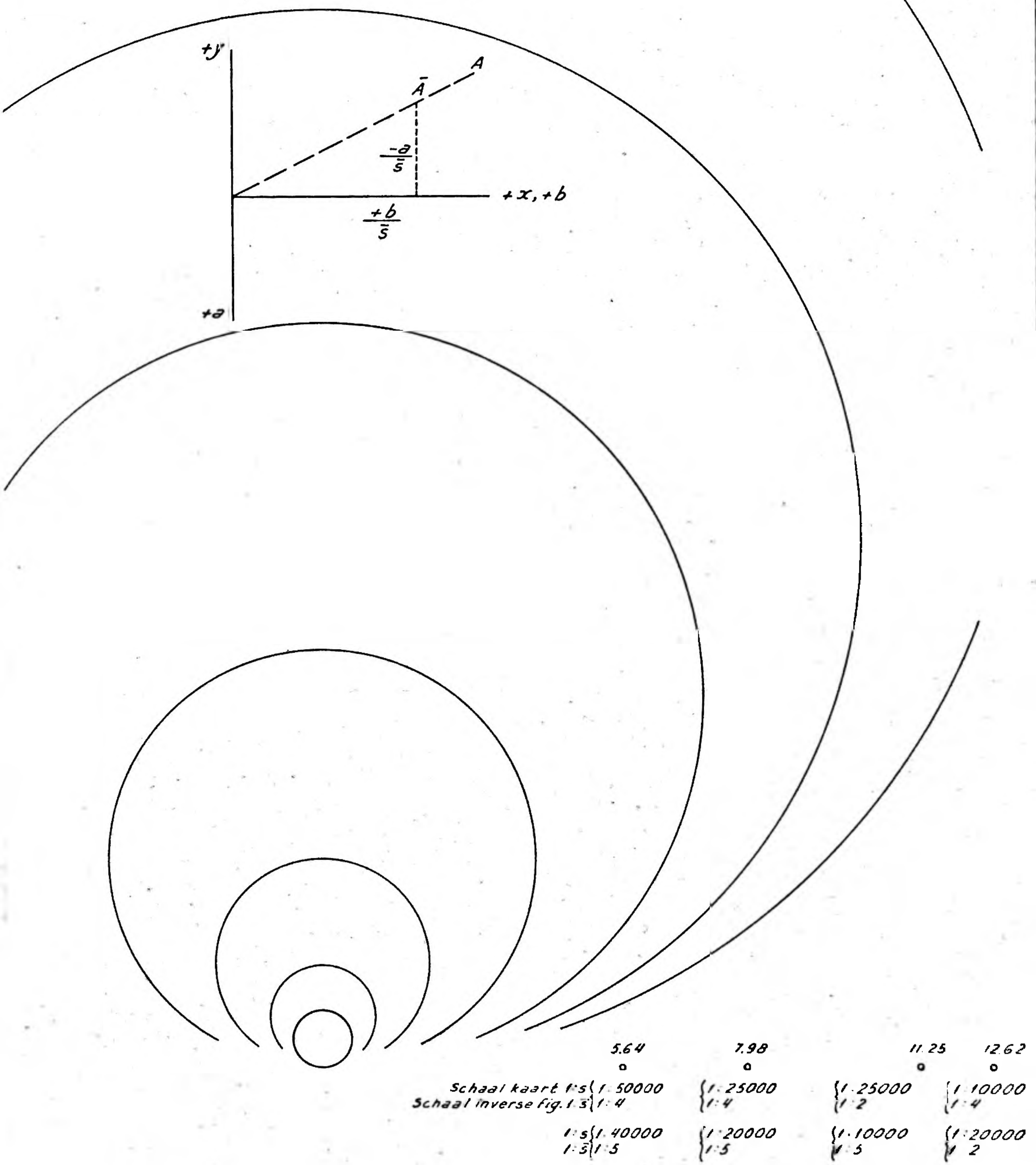
# TAFEL

# TER BEREKENING VAN DE COËFFICIËNTEN a EN b.

Kadaster no. 50.
9934/22 - '38

## Nomogram voor het construeeren van de inverse figuur

a en b voor aangroeiïngen x en y; 1 d.m; ψ : 1$^{cc}$
in de inversefiguur is de eenheid 1 c.m.

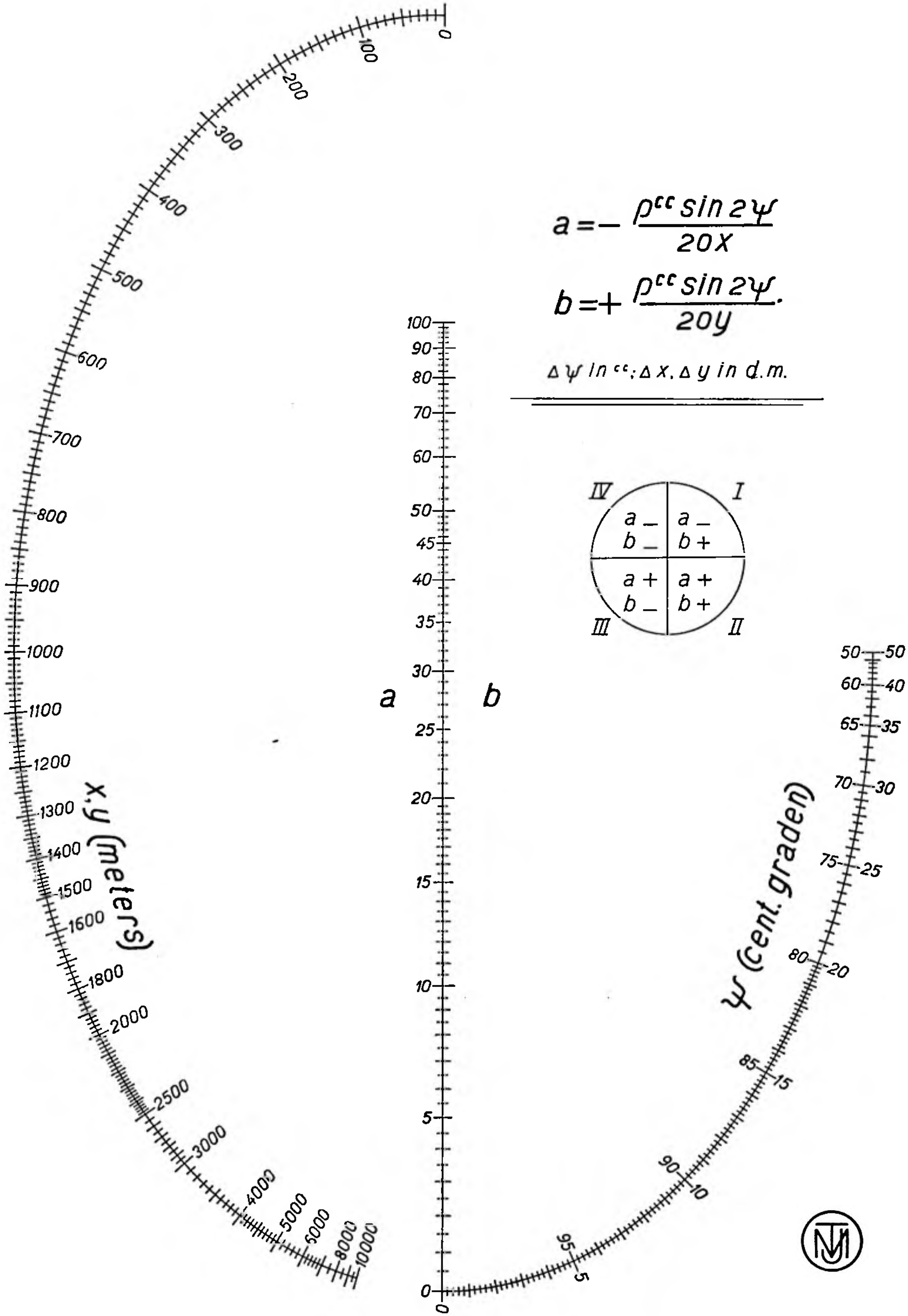



**Kadaster no. 51**
9934 - 23 - '38

$$a = -\frac{\rho^{cc} \sin 2\psi}{20x}$$

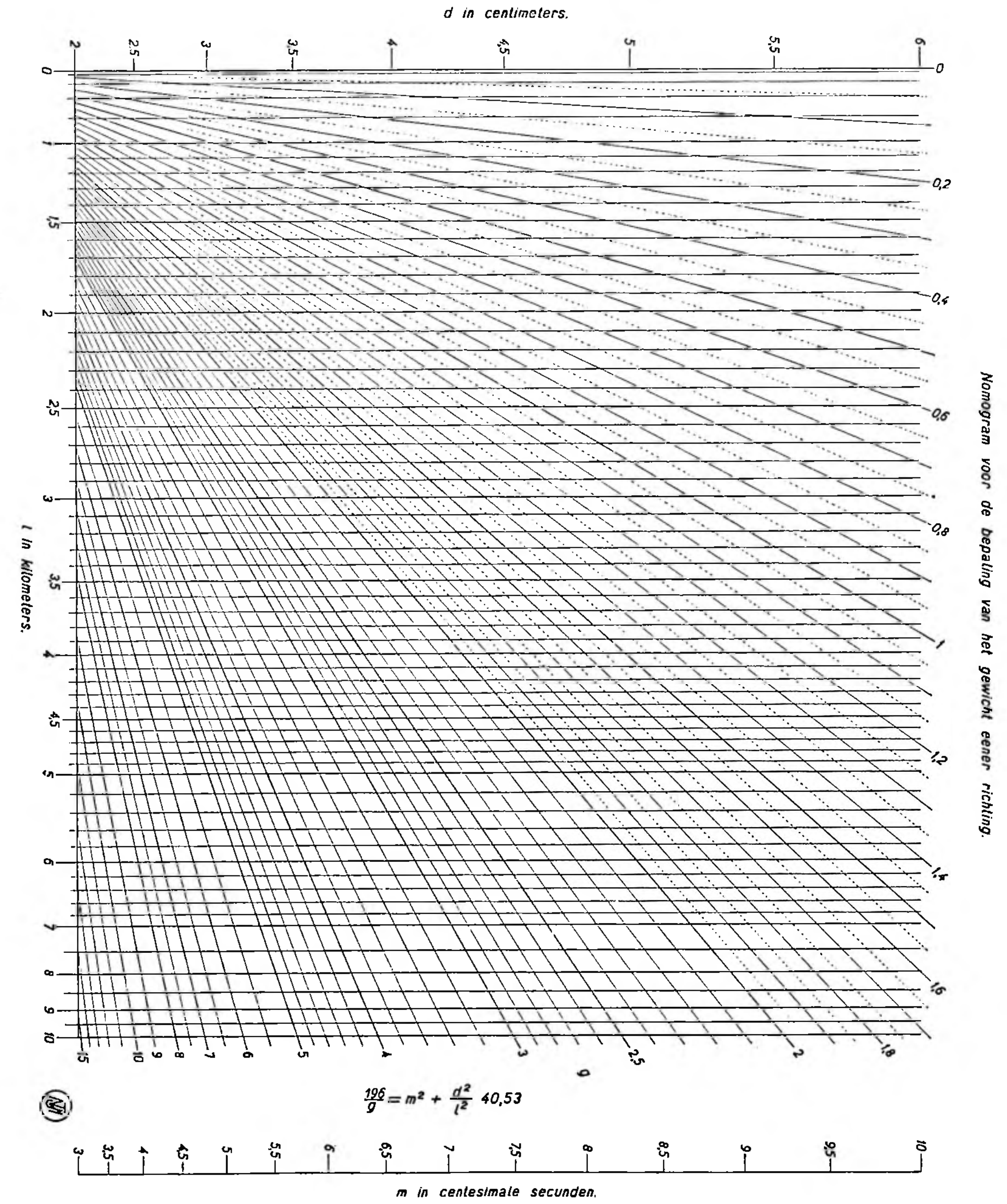
$$b = +\frac{\rho^{cc} \sin 2\psi}{20y}.$$

$\Delta\psi$ in $^{cc}$; $\Delta x$, $\Delta y$ in d.m.

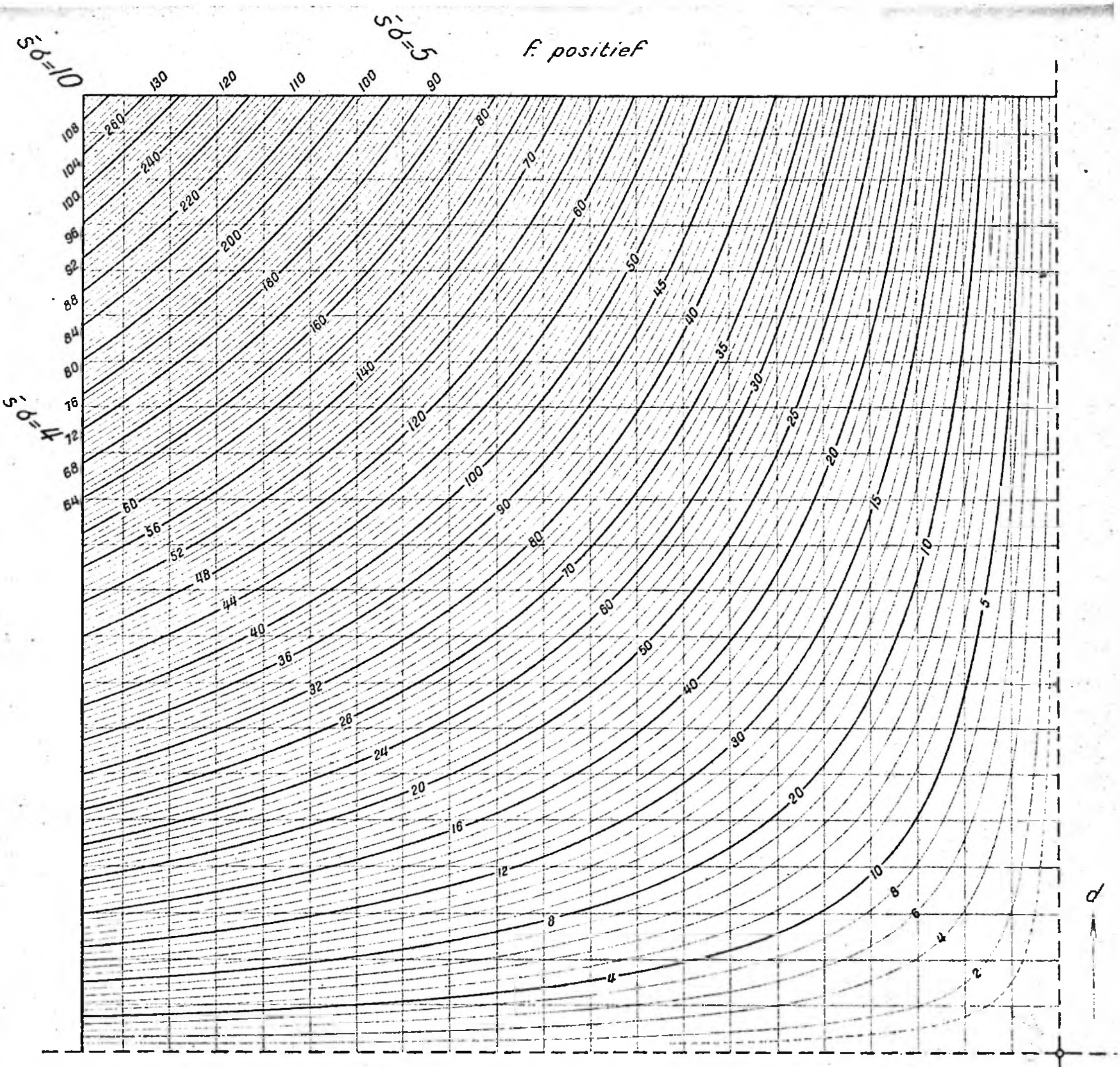



**Kadaster no. 53**

9934 - 24 - '38




**Kadaster no. 54**
9934 - 25 - '38



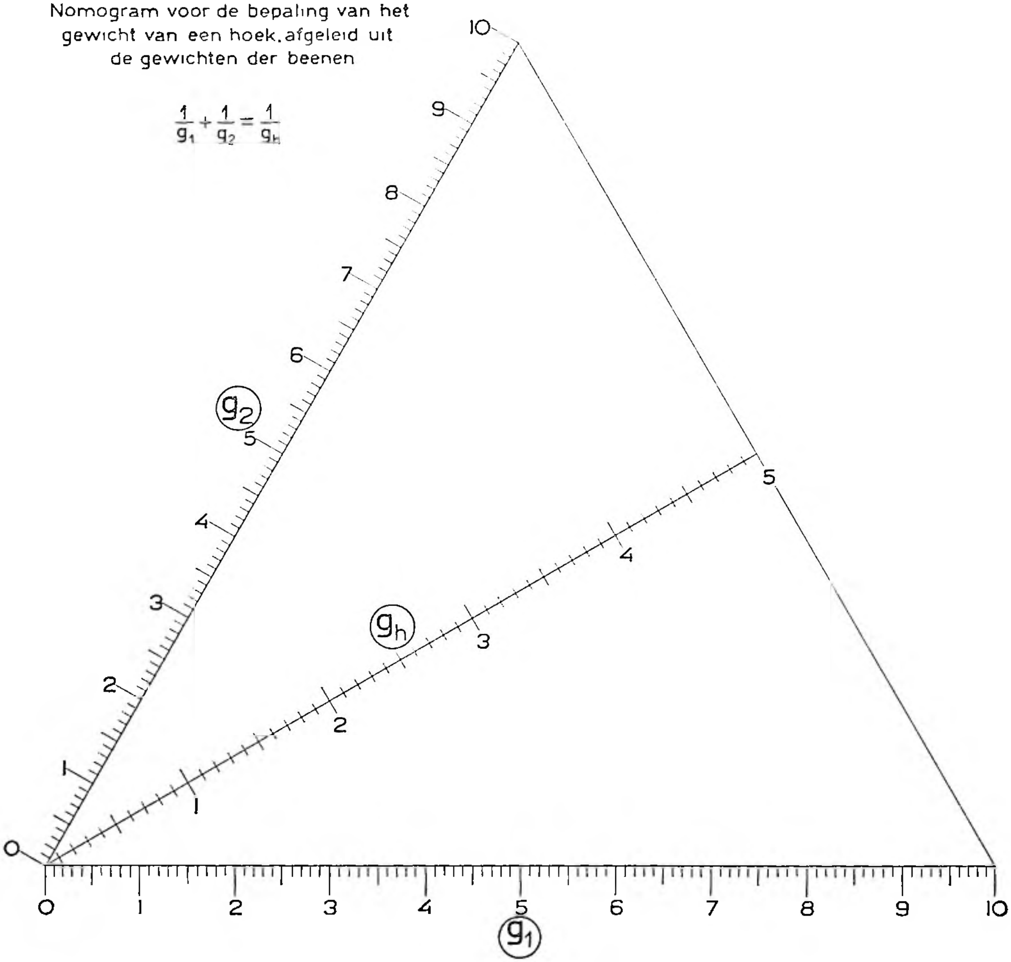

Schaal inverse figuur 1: 5
Schaal Foutentoonende figuur 1:6

# Nomogram voor het construeeren der foutentoonende figuur in de inverse figuur


**Kadaster no. 52**
9934 – 25 – '38

Nomogram voor de bepaling van het gewicht van een hoek, afgeleid uit de gewichten der beenen

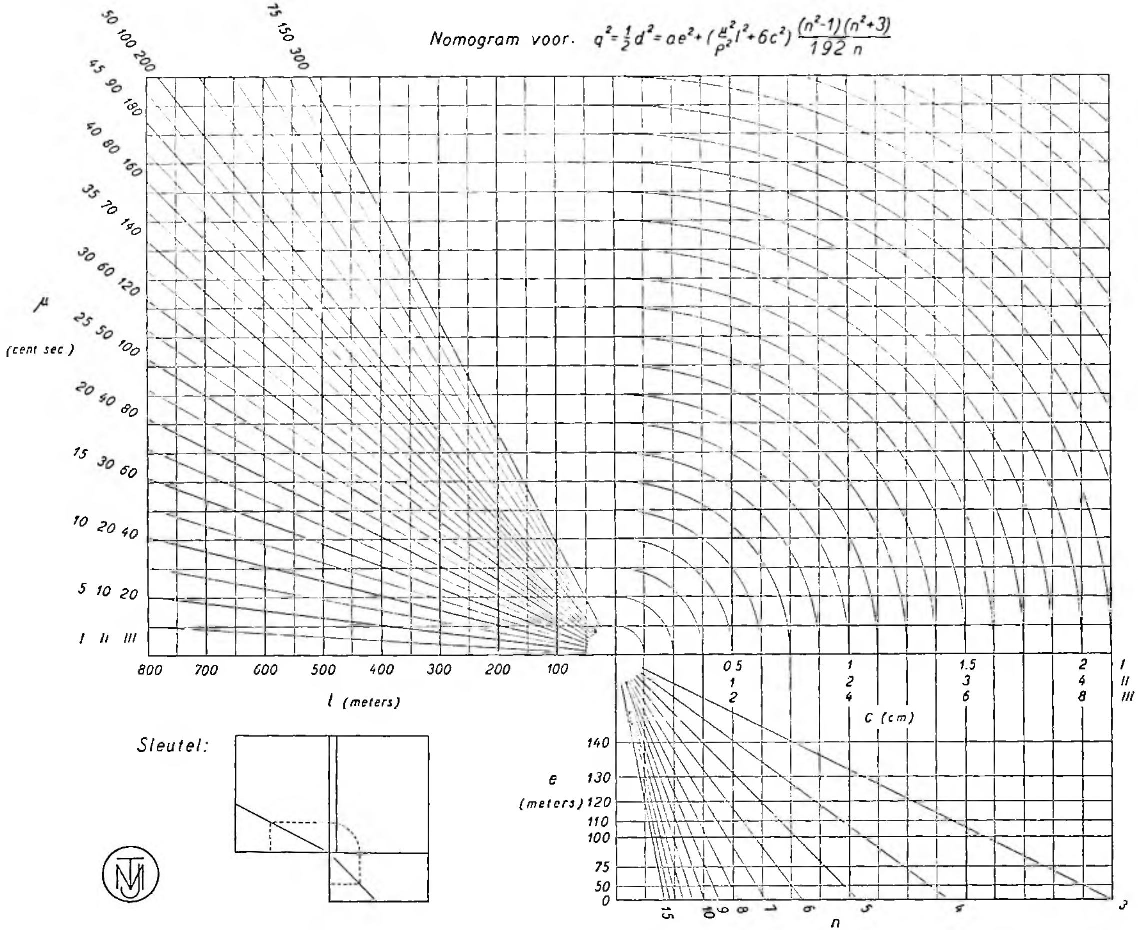
$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = \frac{1}{g_h}$$



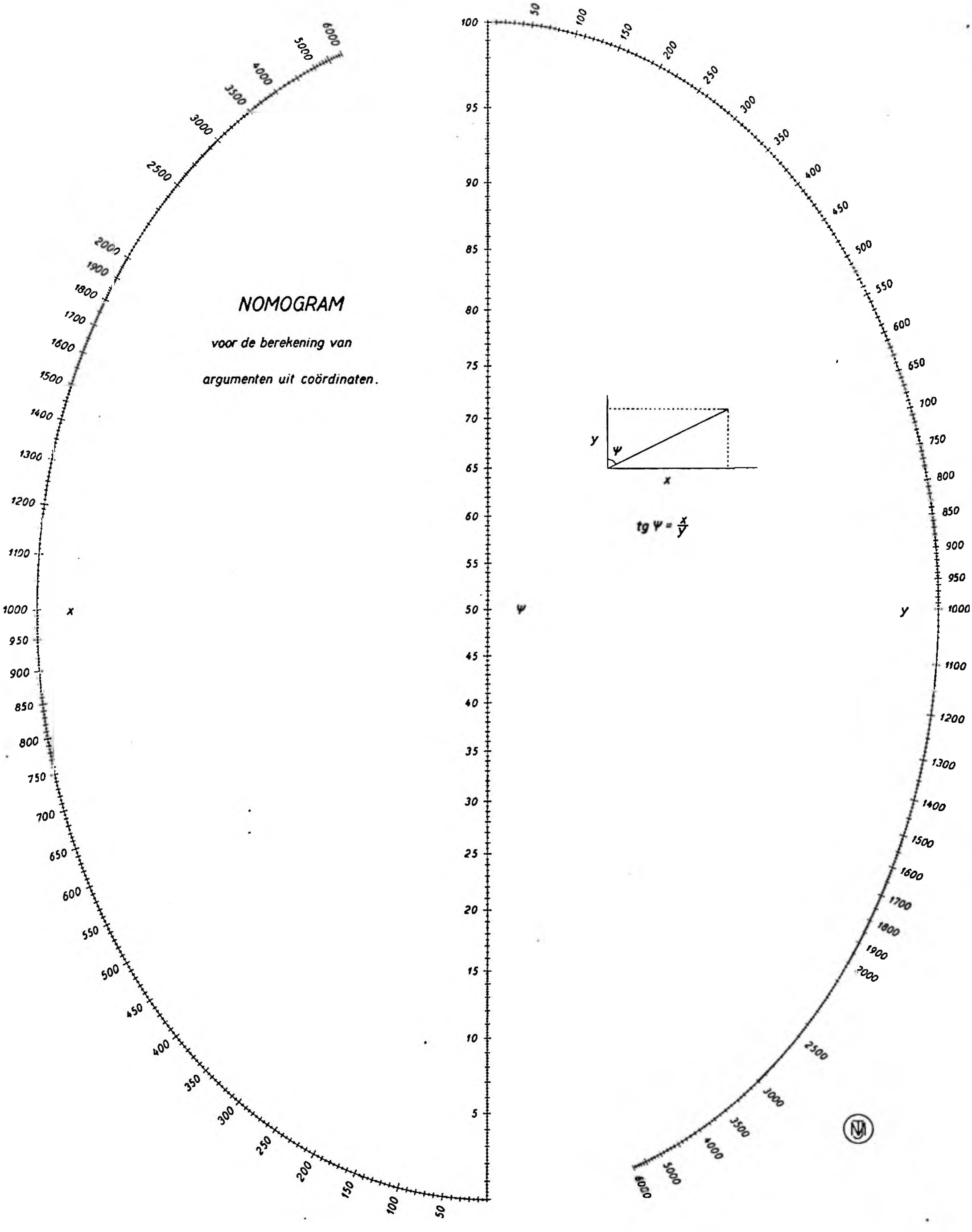

Kadaster no. 55
9934 - 26 - '38

# VEELHOEKSMETING

Nomogram voor. $q^2 = \frac{1}{2} d^2 = ae^2 + (\frac{\mu^2}{\rho^2} l^2 + 6c^2) \frac{(n^2-1)(n^2+3)}{192\, n}$




**Kadaster no. 56**
9934 - 27 - '38




**Kadaster no. 57**
9934 - 28 - '38

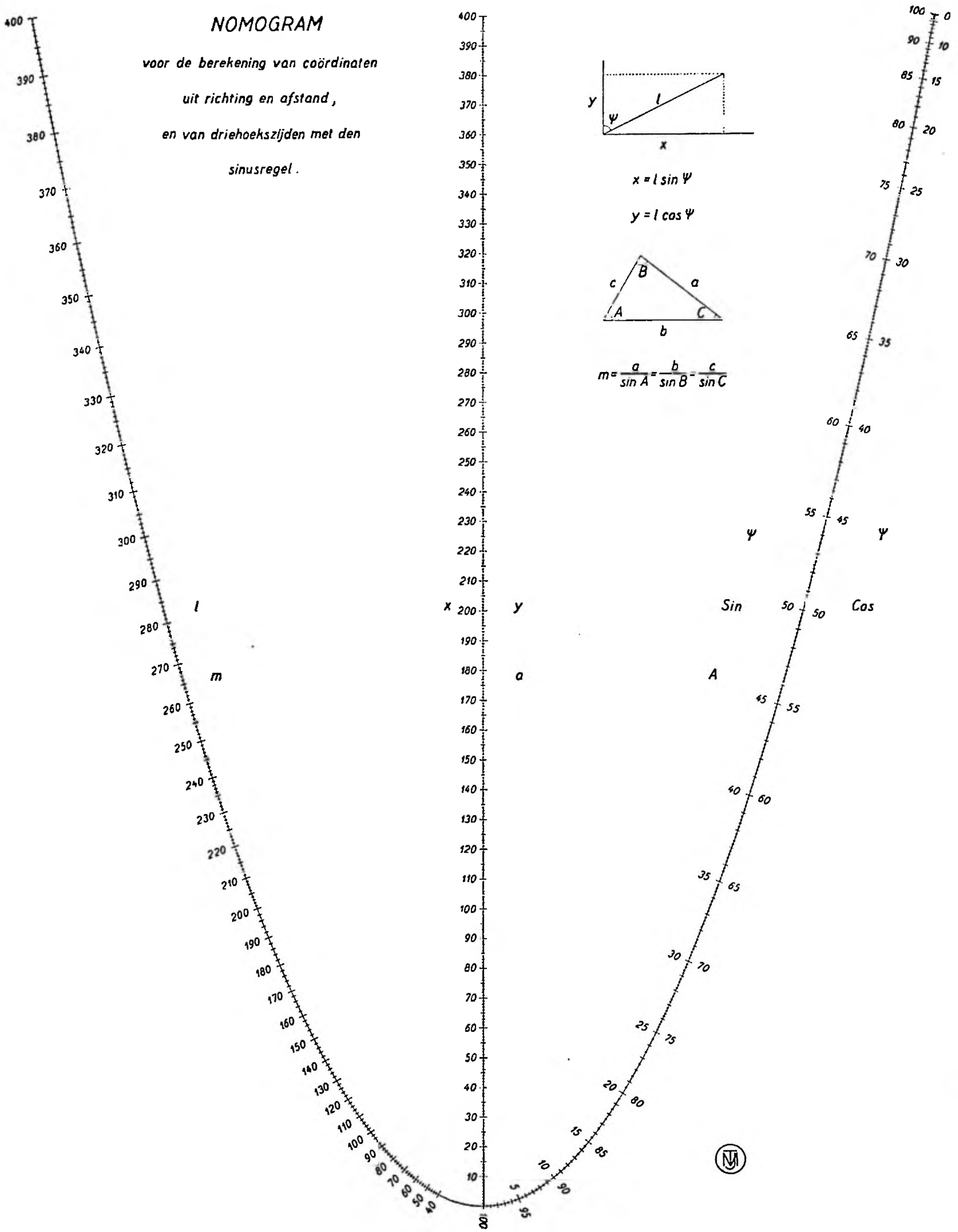
# NOMOGRAM

*voor de berekening van coördinaten*

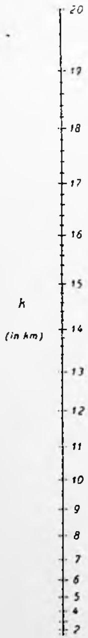
*uit richting en afstand,*

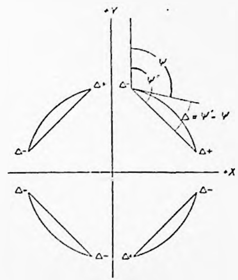
*en van driehoekszijden met den*

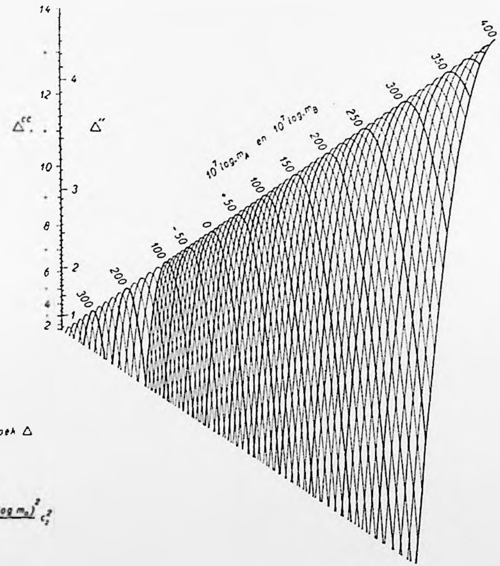
*sinusregel.*




**Kadaster no. 58**
9934 - 29 - '38




## Stereografische projectie

**Nomogram voor de berekening van den hoek Δ**

**tusschen boog en koorde:**

$$\Delta^2 = c_1 k c_2 (10^7 \log m_A + 10^7 \log m_B - 800) - \frac{(10^7 \log m_A - 10^7 \log m_B)^2}{4} c_2^2$$

$c_1 = 0.000632963$

$c_2 = 0.0474942$

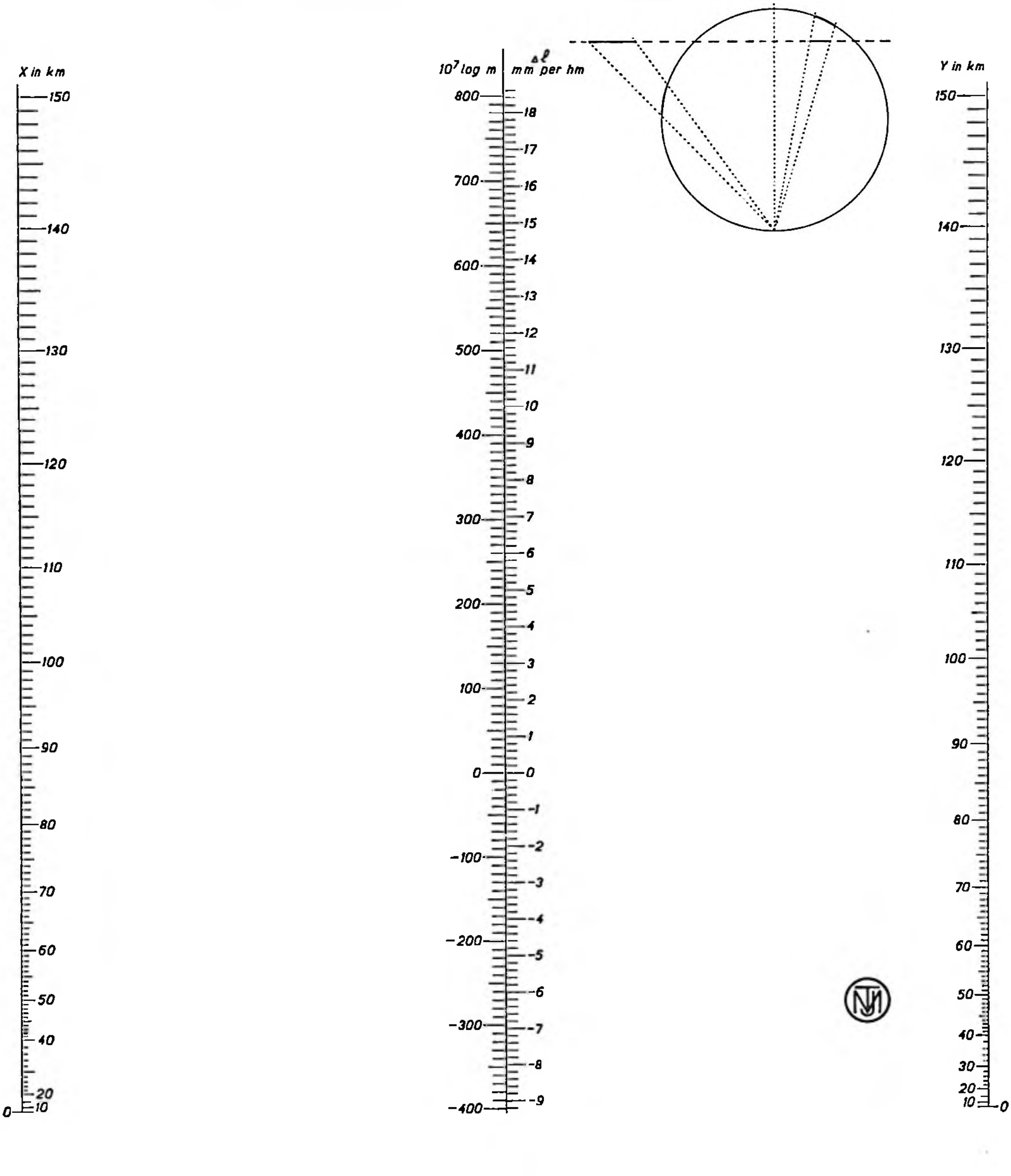
k in kilometers.

**Kadaster no. 59**
9934 - 30 - '38

*Nomogram voor de berekening van de vergrooting ($10^7 \log m$ of $\Delta \ell$) bij de stereografische projectie.*

$10^7 \log m = -400 + 0{,}026656 (X^2 + Y^2)$.

1 hm in kaart = 1 hm in terrein + $\Delta \ell$ mm.




**Kadaster no. 60**
9934 - 31 - '38

## Berekening van argumenten, afstanden en van coëfficiënten a en b.

| Volg num mer. | Punt N<br>Punt P<br>N L M | $X_n$<br>$X_p$<br>$x=X_n-X_p$<br>a | $Y_n$<br>$Y_p$<br>$y=Y_n-Y_p$<br>b | (log x)<br>(log y)<br>(log) tg ψ<br>ψ | (log sin ψ)<br>(log cos ψ)<br>(log l)<br>$l(=\sqrt{x^2+y^2})$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Doesburg I<br>Steenderen I | + 51235,70<br>+ 54849,73<br>− 3614,03 | − 15381,02<br>− 9975,38<br>− 5405,64 | +0.668567<br>237.5171 | | |
| 2 | Brummen II<br>Steenderen I | + 52331,59<br>+ 54849,73<br>− 2518,14 | − 7325,77<br>− 9975,38<br>+ 2649,61 | −0.950331<br>351.6193 | | |
| 3 | Steenderen I Vastl. V<br>Steenderen I | + 54845,76<br>+ 54849,73<br>− 3,97 | − 9973,97<br>− 9975,38<br>+ 1,41 | 321.8083 | −0.941897<br>+0.335903<br>4.2116 | Berekening van coördinaten van Vastl. V Steenderen I |
| 4 | Doesburg I<br>Steenderen I Vastl. V | + 51235,70<br>+ 54845,76<br>− 3610,06 | − 15381,02<br>− 9973,97<br>− 5407,05 | | 6501.44 | |
| 5 | Brummen II<br>Steenderen I Vastl. V | + 52331,59<br>+ 54845,76<br>− 2514,17 | − 7325,77<br>− 9973,97<br>+ 2648,20 | | 3651.58 | |
| 6 | Steenderen I<br>(B)<br>17.94 | + 54849,73<br>+ 50626,24<br>+ 4223,49<br>− 4,2 | − 9975,38<br>− 11279,58<br>+ 1304,20<br>+ 13,8 | +3.238376<br>80.9328 | | |
| 7 | Dremt<br>(B)<br>26.09 | + 53241,61<br>+ 50626,24<br>+ 2615,37<br>+ 10,0 | − 16297,82<br>− 11279,58<br>− 5018,24<br>+ 5,2 | −0.521173<br>169,4141 | | |
| 8 | Doesburg I<br>(B)<br>9.255 | + 51235,70<br>+ 50626,24<br>+ 609,46<br>+ 15,2 | − 15381,02<br>− 11279,58<br>− 4101,44<br>+ 2,3 | −0.148597<br>190.6087 | | |
| 9 | Olburgen<br>(B)<br>5.94 | + 50552,69<br>+ 50626,24<br>− 73,55<br>+ 80,8 | − 12060,41<br>− 11279,58<br>− 780,83<br>− 7,6 | +0.094195<br>205.9790 | 784.29 | |
| 10 | Spankeren I<br>(B)<br>31.70 | + 49867,99<br>+ 50626,24<br>− 758,25<br>− 41,8 | − 10587,51<br>− 11279,58<br>+ 692,07<br>− 45,8 | −1.095626<br>347.0970 | 1026.60 | |
| 11 | Geld. Toren<br>(B)<br>26.91 | + 51229,05<br>+ 50626,24<br>+ 602,81<br>− 44,6 | − 10185,49<br>− 11279,58<br>+ 1094,09<br>+ 24,6 | +0.550969<br>32.0593 | 1249.16 | |
| 12 | (B signaal)<br>(B) | + 50626,36<br>+ 50626,24<br>+ 0,12 | − 11280,26<br>− 11279,58<br>− 0,68 | 188.7068 | 0.176464<br>0.984307<br>0.692 | Berekening van coördinaten (B signaal) |
| 13 | Steenderen I Vastl. V<br>(B) | + 54845,76<br>+ 50626,24<br>+ 4219,52 | − 9973,97<br>− 11279,58<br>+ 1305,61 | +3.23184<br>80.8964 | 4416.90 | |
| 14 | (B signaal)<br>Steenderen I Vastl. V | + 50626,36<br>+ 54845,76<br>− 4219,40 | − 11280,26<br>− 9973,97<br>− 1306,29 | | 4416.98 | |

9934 - 32 - '38

Form. 12
N: 2

**Berekening van argumenten, afstanden en van coëfficiënten a en b.**

| Volg num mer. | Punt N<br>Punt P<br>$N^{L}_{M}$ | $X_n$<br>$X_p$<br>$x=X_n-X_p$<br>a | $Y_n$<br>$Y_p$<br>$y=Y_n-Y_p$<br>b | (log x)<br>(log y)<br>(log) tg ψ<br>ψ | (log sin ψ)<br>(log cos ψ)<br>(log l)<br>$l(=\sqrt{x^2+y^2})$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Steenderen I<br>B | + 54849,73<br>+ 50626,24<br>+ 4223,49 | − 9975,38<br>− 11279,59<br>+ 1304,21 | +3.23835<br>80.9326 | | |
| 2 | Drempt<br>B | + 53241,61<br>+ 50626,24<br>+ 2615,37 | − 16297,82<br>− 11279,59<br>− 5018,23 | −0.521174<br>169.4140 | | |
| 3 | Doesburg I<br>B | + 51235,70<br>+ 50626,24<br>+ 609,46 | − 15381,02<br>− 11279,59<br>− 4101,43 | −0.148597<br>190.6088 | | |
| 4 | Olburgen<br>B | + 50552,69<br>+ 50626,24<br>− 73,55 | − 12060,41<br>− 11279,59<br>− 780,82 | +0.094196<br>205.9791 | | |
| 5 | Spankeren I<br>B | + 49867,99<br>+ 50626,24<br>− 758,25 | − 10587,51<br>− 11279,59<br>+ 692,08 | −1.095610<br>347.0975 | | |
| 6 | Geld. Toren<br>B | + 51229,05<br>+ 50626,24<br>+ 602,81 | − 10185,49<br>− 11279,59<br>+ 1094,10 | +0.550964<br>32.0591 | | |
| 7 | Geld. Toren<br>(E)<br>7.833 | + 51229,05<br>+ 52718,13<br>− 1489,08<br>+ 5,3 | − 10185,49<br>− 9999,42<br>− 186,07<br>− 42,1 | +8.002795<br>292.0860 | | |
| 8 | Steenderen I<br>(E)<br>0.7179<br>63.66 | + 54849,73<br>+ 52718,13<br>+ 2131,60<br>− 0,3 | − 9975,38<br>− 9999,42<br>+ 24,04<br>+ 29,9 | +88.6689<br>99.2821 | | |
| 9 | Dieren II<br>(E)<br>30.00 | + 49274,83<br>+ 52718,13<br>− 3443,30<br>+ 8,7 | − 12432,32<br>− 9999,42<br>− 2432,90<br>− 12,3 | +1.415307<br>260.8405 | | |
| 10 | Brummen I<br>(E)<br>3 625 | + 52871,35<br>+ 52718,13<br>+ 153,22<br>− 23,7 | − 7317,54<br>− 9999,42<br>+ 2681,88<br>+ 1,3 | +0.057132<br>3.6332 | | |
| 11 | Doesburg I<br>(E)<br>16.30 | + 51235,70<br>+ 52718,13<br>− 1482,43<br>+ 11,0 | − 15381,02<br>− 9999,42<br>− 5381,60<br>− 3,0 | +0.275463<br>217.1121 | | |
| 12 | Geld. Toren<br>E | + 51229,05<br>+ 52718,06<br>− 1489,01 | − 10185,49<br>− 9999,34<br>− 186,15 | +7.99898<br>292.0823 | | |
| 13 | Steenderen I<br>E | + 54849,73<br>+ 52718,06<br>+ 2131,67 | − 9975,38<br>− 9999,34<br>+ 23,96 | +88.9679<br>99.2845 | | |
| 14 | Dieren II<br>E | + 49274,83<br>+ 52718,06<br>− 3443,23 | − 12432,32<br>− 9999,34<br>− 2432,98 | +1.415232<br>260.8389 | | |

**Kadaster**
9934 - 33 - '38

Berekening van argumenten, afstanden en van coëfficiënten a en b.

| Volgnummer | Punt N<br>Punt P<br>$N^L_M$ | $X_n$<br>$X_p$<br>$x=X_n-X_p$<br>a | $Y_n$<br>$Y_p$<br>$y=Y_n-Y_p$<br>b | (log x)<br>(log y)<br>(log) tg ψ<br>ψ | (log sin ψ)<br>(log cos ψ)<br>(log l)<br>$l(=\sqrt{x^2+y^2})$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Brummen I<br>E | + 52871,35<br>+ 52718,06<br>+ 153,29 | − 7317,54<br>− 9999,34<br>+ 2681,80 | +0.057159<br>3.6349 | | |
| 2 | Doesburg I<br>E | + 51235,70<br>+ 52718,06<br>− 1482,36 | − 15381,02<br>− 9999,34<br>− 5381,68 | +0.275446<br>217.1111 | | |
| 3 | Steenderen I<br>(C)<br>28.50 | + 54849,73<br>+ 53746,86<br>+ 1102,87<br>− 25,8 | − 9975,38<br>− 11756,60<br>+ 1781,22<br>+ 16,0 | +0.619166<br>35.2938 | | |
| 4 | Baak<br>(C)<br>31.54 | + 57708,80<br>+ 53746,86<br>+ 3961,94<br>− 8,0 | − 8291,95<br>− 11756,60<br>+ 3464,65<br>+ 9,1 | +1.143533<br>54.2565 | | |
| 5 | (N)<br>(C)<br>26.81 | + 53530,78<br>+ 53746,86<br>− 216,08<br>+ 124,1 | − 12151,39<br>− 11756,60<br>− 394,79<br>− 67,9 | +0.547329<br>231.8813 | | |
| 6 | Doesburg I<br>(C)<br>29.80 | + 51235,70<br>+ 53746,86<br>− 2511,16<br>+ 11,9 | − 15381,02<br>− 11756,60<br>− 3624,42<br>− 8,2 | +0.692845<br>238.5734 | | |
| 7 | Spankeren I<br>(C)<br>17.59 | + 49867,99<br>+ 53746,86<br>− 3878,87<br>− 4,5 | − 10587,51<br>− 11756,60<br>+ 1169,09<br>− 15,0 | −3.317854<br>318.6364 | | |
| 8 | Drempt<br>(N)<br>4.418 | + 53241,61<br>+ 53530,78<br>− 289,17<br>+ 15,3 | − 16297,82<br>− 12151,39<br>− 4146,43<br>− 1,1 | +0.069740<br>204.4326 | | |
| 9 | Dieren II<br>(N)<br>4.165 | + 49274,83<br>+ 53530,78<br>− 4255,95<br>+ 1,0 | − 12432,32<br>− 12151,39<br>− 280,93<br>− 14,9 | + 15.1495<br>295.8038 | | |
| 10 | Geld. Toren<br>(N)<br>31.44 | + 51229,05<br>+ 53530,78<br>− 2301,73<br>− 13,7 | − 10185,49<br>− 12151,39<br>+ 1965,90<br>− 16,0 | −1.170828<br>345.0006 | | |
| 11 | Steenderen I Vaste Y<br>(C) | + 54845,76<br>+ 53746,86<br>+ 1098,90 | − 9973,97<br>− 11756,60<br>+ 1782,63 | | 2094.12 | |
| 12 | Steenderen I<br>C | + 54849,73<br>+ 53746,83<br>+ 1102,90 | − 9975,38<br>− 11756,64<br>+ 1781,26 | +0.619168<br>35.2939 | | |
| 13 | Baak<br>C | + 57708,80<br>+ 53746,83<br>+ 3961,97 | − 8291,95<br>− 11756,64<br>+ 3464,69 | +1.143528<br>54.2564 | | |
| 14 | N<br>C | + 53530,75<br>+ 53746,83<br>− 216,08 | − 12151,29<br>− 11756,64<br>− 394,65 | +0.547523<br>231.8908 | | |

Berekening van argumenten, afstanden en van coëfficiënten a en b.

| Volg num mer. | Punt N<br>Punt P<br>$N^{L}_{M}$ | $X_n$<br>$X_p$<br>$x = X_n - X_p$<br>a | $Y_n$<br>$Y_p$<br>$y = Y_n - Y_p$<br>b | (log x)<br>(log y)<br>(log) tg ψ<br>ψ | (log sin ψ)<br>(log cos ψ)<br>(log l)<br>$l (= \sqrt{x^2 + y^2})$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Doesburg I<br>C | + 51235,70<br>+ 53746,83<br>− 2511,13 | − 15381,02<br>− 11756,64<br>− 3624,38 | +0.692844<br>238.5732 | | |
| 2 | Spankeren I<br>C | + 49867,99<br>+ 53746,83<br>− 3878,84 | − 10587,51<br>− 11756,64<br>+ 1169,13 | −3.317715<br>318.6372 | | |
| 3 | Drempt<br>N | + 53241,61<br>+ 53530,75<br>− 289,14 | − 16297,82<br>− 12151,29<br>− 4146,53 | +0069731<br>204.4320 | | |
| 4 | Dieren II<br>N | + 49274,83<br>+ 53530,75<br>− 4255,92 | − 12432,32<br>− 12151,29<br>− 281,03 | +15.1440<br>2958023 | | |
| 5 | Geld Toren<br>N | + 51229,05<br>+ 53530,75<br>− 2301,70 | − 10185,49<br>− 12151,29<br>+ 1965,80 | −1170872<br>344.9994 | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |
| | | − ,<br>− ,<br>− , | − ,<br>− ,<br>− , | | | |

**Kadaster**
9934 - 35 - '38

Staat van waarnemingen en uitkomsten

Gemeente Steenderen

Punt: Steenderen I

X: + 54849,73 $M_x$: –

Y: – 9975.38 $M_y$: –

Middelbare fouten:

Form. 11 m = 46 cc

" 19/20 m = ___ cc

Verwijzing naar formulieren (bl.)

11 ___ 20 ___
12 ___ 21 ___
14 1 22 ___
18 ___ 26 ___
19 ___

Opmerkingen

Argument Centrum - Vastl. V
321.8083

Afstand Centrum - Vastl. V
4.2116 m

Het bedrag 0.099 in kol. 5 is de overgang van B signaal naar B

| Waargenomen punten | Argumenten $\psi$ | Gemeten richtingen in centrum $\alpha$ ($\alpha = \bar{\alpha} + d$) | Excentrisch gemeten richtingen $\bar{\alpha}$ | Overgang naar centrum d | Verschillen $\psi - \alpha$ / Orienteering $o = \frac{[g(\psi - \alpha)]}{[g]}$ | Gewichten g | Gemeten en georienteerde richtingen $\alpha + o$ | $v = \psi - (\alpha + o)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | | | Op Vastl. V | | | | | |
| C | | 0.0964 | 399.9713 | +0.1251 | | | 235.2934 | |
| Doesburg I | 237.5171 | 2.3192 | 2.2792 | +0.0400 | 235.1979 | 1 | 237.5162 | + 9 |
| B (signaal) | | | 45.6831 | (+0.0099) | | | | |
| B | 280.9322 | 45.7294 | (45.6930) | +0.0364 | | | 280.9264 | + 58 |
| Brummen II | 351.6193 | 116.4233 | 116.4564 | -0.0331 | 235.1960 | 1 | 351.6203 | – 10 |
| | | | | | 235.1970 | | | |

## Staat van waarnemingen en uitkomsten

**Gemeente** Steenderen

Punt: B

x: + 50626.24 $M_x$: 0.01

Y: − 11279.59 $M_y$: 0.01

**Middelbare fouten:**

Form. 11 m = {4.9 cc / 3.4

" 19/~~20~~ m = 2.8 cc

**Verwijzing naar formulieren (bl.)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | | 20 | |
| 12 | 1.2 | 21 | |
| 14 | 1 | 22 | |
| 18 | | 26 | |
| 19 | 1 | | |

**Opmerkingen.**

Afstand B-B exc.: 22,3334 m
temp. 16°
meetlint 4 B (30 m)

Afstand B centr.-B signaal
0.692 m.

| Waargenomen punten | Argumenten ψ | Gemeten richtingen in centrum α (α = ᾱ + d) | Excentrisch gemeten richtingen ᾱ | Overgang naar centrum d | Verschillen ψ − α / Orienteering $o = \frac{[g(\psi-\alpha)]}{[g]}$ | Gewichten g | Gemeten en georienteerde richtingen α + o | v = ψ − (α + o) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Steenderen I | 80,9326 | 0.0000 | | | 80.9326 | 1 | 80.9316 | + 10 |
| Drempt | 169,4140 | 88.4831 | | | 9309 | 1 | 169.4147 | − 7 |
| Doesburg I | 190,6088 | 109.6779 | | | 9309 | 1 | 190.6095 | − 7 |
| Olburgen | 205,9791 | 125.0469 | | | 9322 | 1 | 205.9785 | + 6 |
| | | | | | 80.9316 | | | |
| | | | Op B exc | | | | | |
| Olburgen | 205.9791 | 1.4673 | 0.0000 | +1.4673 | 204.5118 | 1 | 205.9789 | + 2 |
| Spankeren I | 347.0975 | 142.5858 | 142.6441 | −0.0583 | 5117 | 1 | 347.0974 | + 1 |
| Geld. Toren | 32.0591 | 227.5478 | 228.6682 | −1.1204 | 5113 | 1 | 32.0594 | − 3 |
| Centrum | | | 339.9630 | | | | | |
| | | | | | 204.5116 | | | |
| Olburgen | 205.9791 | 0.0000 | | | 205.9791 | | 205.9791 | |
| P 11 | | 291.0425 | | | | | 97.0216 | |
| P 12 | | 296.0927 | | | | | 102.0718 | |
| Olburgen | (205.9790) | 0.0000 | | | (205.9790) | | (205.9790) | |
| B signaal | | 362.7278 | | | | | (188.7068) | |

Form. 13

bl. 3

Staat van waarnemingen en uitkomsten

Gemeente: Steenderen

Punt: C

X: + 53746.83 $M_x$: 0.03

Y: − 11756.64 $M_y$: 0.04

Middelbare fouten:

Form. 11 m = {4.6 / ~~6.2~~} cc

" ~~19~~ 20 m = 13 cc

Verwijzing naar formulieren (bl.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | | 20 | 2 |
| 12 | 3 en 4 | 21 | 1 |
| 14 | | 22 | 1 |
| 18 | | 26 | |
| 19 | | | |

Opmerkingen

| Waargenomen punten | Argumenten ψ | Gemeten richtingen in centrum α (α = ᾱ + d) | Excentrisch gemeten richtingen ᾱ | Overgang naar centrum d | Verschillen ψ − α / Orienteering o = [g(ψ − α)] / [g] | Gewichten g | Gemeten en georienteerde richtingen α + o | v = ψ − (α + o) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Steenderen I | 35.2939 | 0.0000 | | | 35.2939 | 1.7 | 35.2945 | − 6 |
| Baak | 54.2564 | 18.9619 | | | 45 | 4.4 | 54.2564 | 0 |
| N | 231.8908 | 196.5951 | | | 57 | 6.0 | 231.8896 | + 12 |
| Doesburg I | 238.5732 | 203.2794 | | | 38 | 4.0 | 238.5739 | − 7 |
| Spankeren I | 318.6372 | 283.3425 | | | 47 | 3.7 | 318.6370 | + 2 |
| | | | | | 35.2945 | 19.8 | | |
| | | In het punt | $C_2$ (N) | | | | | |
| Drempt | 204.4320 | 0.0000 | | | 204.4320 | 3.8 | 204.4318 | + 2 |
| Dieren II | 295.8023 | 91.3701 | | | 22 | 3.9 | 295.8019 | + 4 |
| Geld Toren | 344.9994 | 140.5681 | | | 13 | 2.7 | 344.9999 | − 5 |
| $C_1$ | 31.8908 | 2274589 | | | 19 | 6.0 | 31.8907 | + 1 |
| | | | | | 204.4318 | 16.4 | | |

Staat van waarnemingen en uitkomsten.

Gemeente: Steenderen

Punt: F

X: + 52718.06 $M_x$: 0.018

Y: − 9999.34 $M_y$: 0.014

Middelbare fouten:

Form. 11 m = 4.6cc

" 19/20 m = 10 cc

Verwijzing naar formulieren (bl)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | | 20 | 1 |
| 12 | 2 – 3 | 21 | |
| 14 | ° | 22 | |
| 18 | | 26 | |
| 19 | | | |

Opmerkingen

De hoeken zijn 6 maal gemeten. De middelbare fout in de gemiddelde waargenomen richting is 4.6 c.c

| Waargenomen punten | Argumenten $\psi$ | Gemeten richtingen in centrum $\alpha$ ($\alpha = \overline{\alpha} + d$) | Excentrisch gemeten richtingen $\overline{\alpha}$ | Overgang naar centrum d | Verschillen $\psi - \alpha$ / Orienteering $o = \frac{[g(\psi-\alpha)]}{[g]}$ | Gewichten g | Gemeten en georienteerde richtingen $\alpha + o$ | $v = \psi - (\alpha + o)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Geld. Toren | 292.0823 | 0.0000 | | | | | | |
| Steenderen I | 99.2845 | 207.2035 | | | | | | |
| | 192.7978 | 192.7965 | | | | | | + 13 |
| Dieren II | 260.8389 | 0.0000 | | | | | | |
| Steenderen I | 99.2845 | 238.4447 | | | | | | |
| | 161.5544 | 161.5553 | | | | | | − 9 |
| Dieren II | 260.8389 | 0.0000 | | | | | | |
| Brummen I | 3.6349 | 142.7961 | | | | | | |
| | 257.2040 | 257.2039 | | | | | | + 1 |
| Doesburg I | 217.1111 | 0.0000 | | | | | | |
| Brummen I | 3.6349 | 186.5241 | | | | | | |
| | 213.4762 | 213.4759 | | | | | | + 3 |

## Berekening van overgangen.

| Form. 13 bl: 1 en 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Overgang van A | Steenderen I Centr. | Steenderen I Centr. | B exc | B exc. | B exc. | B | Steenderen I Centr. | Steenderen I Centr. | |
| naar B | Steenderen I Vastl. V | Steenderen I Vastl. V | B | B | B. | B signaal | Steenderen I Vastl. V | Steenderen I Vastl. V | |
| voor richting P | Doesburg I | Brummen II | Olburgen | Spankeren | Geldersche Toren | Steenderen I Vastl. V | B | C | |
| $(\overline{AP})$ | 237.5171 | 351.6193 | 0.0000 | 142.6441 | 228.6682 | 80.8964 | 280.9328 | 235.2938 | |
| $(\overline{AB})$ | 321.8083 | 321.8083 | 339.9630 | 339.9630 | 339.9630 | 188.7068 | 321.8083 | 321.8083 | |
| $\varphi$ | 315.7088 | 29.8110 | 60.0370 | 202.6811 | 288.7052 | 292.1896 | 359.1245 | 313.4855 | |
| (log) sin $\varphi$ | -0.969711 | +0.451343 | +0.809358 | -0.042102 | -0.984303 | -0.992483' | -0.598855 | -0.977648 | |
| (colog) BP | 6501.44 | 3651.58 | 784.29 | 1026.60 | 1.249.16 | 4416.98 | 4416.90 | 2094.12 | |
| (log) e | 4.2116 | 4.2116 | 22.333 | 22.333 | 22.333 | 0.692 | 4.2116 | 4.2116 | |
| (log) $\rho$ | 63.6620 | 63.6620 | 63.6620 | 63.6620 | 63.6620 | 63.6620 | 63.6620 | 63.6620 | |
| (log d') | | | | | | | | | |
| d' | − 0.0400 | + 0.0331 | + 1.4672 | − 0.0583 | − 1.1203 | − 0.0099 | − 0.0364 | − 0.1251 | |
| Δd | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| d | − 0.0400 | + 0.0331 | + 1.4673 | − 0.0583 | − 1.1204 | − 0.0099 | − 0.0364 | − 0.1251 | |

| Form. 13 bl: | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Overgang van A | | | | | | | | | |
| naar B | | | | | | | | | |
| voor richting P | | | | | | | | | |
| $(\overline{AP})$ | | | | | | | | | |
| $(\overline{AB})$ | | | | | | | | | |
| $\varphi$ | | | | | | | | | |
| (log) sin $\varphi$ | | | | | | | | | |
| (colog) BP | | | | | | | | | |
| (log) e | | | | | | | | | |
| (log) $\rho$ | | | | | | | | | |
| (log d') | | | | | | | | | |
| d' | | | | | | | | | |
| Δd | | | | | | | | | |
| d | | | | | | | | | |

$\rho^{cc} = 636620$ $\log \rho^{cc} = 5,803880$ $\rho'' = 206265$ $\log \rho'' = 5,314425$

Kadaster
9934 - 40 - '38

I

Berekening van centreeringselementen door middel van een lokale driehoeksmeting.

Controle van een torencentrum.

Punt: Steenwijk Kerktoren Form.13. bl:

Berekening definitieve richting $\overline{RP}^* = \omega^*$

| | |
|---|---|
| $\overline{RP}$ | |
| $\overline{RC}$ | - - - - - - - |
| $\varphi$ | |
| (log) sin $\varphi$ | |
| (colog) CP | |
| (log) $r_R$ | |
| log $\rho$ | |
| (log d') | |
| d' | |
| Δd | |
| d | |
| $\overline{CP}$ | - - - - - - - |
| $\overline{RP}^* = \overline{CP} - d = \omega^*$ | |
| $\omega$ | - - - - - - - |
| $\Delta\omega = \omega^* - \omega$ | 0,0000 |

Form.18 bl:

Uitkomsten 1933

| Punten. | Richtingen $\psi$ | Def. richtingen $\psi^* = \psi + \Delta\omega$ | log afstand r | afstand r' |
|---|---|---|---|---|
| In Centrum is: | | | | |
| Vastlegging I | | 308.0367 | 0.72552 | 5.315 |
| Pijler | | 324.9754 | 0.68404 | 4.831 |
| St.b.Kn. 1933 | is identiek | met Centrum | | |
| Basis Noord | | 278.7523 | 1.71593 | 51.991 |
| Basis Zuid | | 251.1446 | 1.77270 | 59.252 |
| In Pijler is: | | | | |
| Richting P ( | Vessem C) | 350.3049 | | |
| Centrum | | 124.9754 | 0,68404 | 4,831 |

Kadaster
9934 - 41 - '38

Vereffening van de coördinaten van het punt: B (gelijke gewichten) Form. 13 bl. 2



## 1. Correctie vergelijkingen enz.

| Buitenrichtingen | Gemeten richtingen α + 200$^g$ | | ψ' | a | b | f = ψ' − (α + 200$^g$) | s = a + b + f | aΔX | bΔY | Δψ | | f + Δψ = v | ψ = ψ' + Δψ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Binnenrichtingen** | **Gemeten richtingen α** | **α + o'** | **ψ'** | **a** | **b** | **f = ψ' − (α + o')** | **s = a + b + f** | **aΔX** | **bΔY** | **Δψ** | **f + Δψ = v + Δo** | **f + Δψ − Δo = v** | **ψ = ψ' + Δψ** |
| Steenderen I | 80.9318 | | 9328 | − 4.2 | + 13.8 | + 10 | + 19.6 | + 0.1 | − 1.6 | − 1.5 | | + 8.5 | 80.9327 |
| Steenderen I | 0.0000 | 80.9328 | ,9328 | − 4.2 | + 13.8 | 0 | + 9.6 | + 0.1 | − 1.6 | − 1.5 | − 1.5 | + 10.9 | 80.9327 |
| Drempt | 88.4831 | 169.4159 | ,4141 | + 10.0 | + 5.2 | − 18 | − 2.8 | − 0.3 | − 0.6 | − 0.9 | − 18.9 | − 6.5 | 169.4140 |
| Doesburg I | 109.6779 | 190.6107 | ,6087 | + 15.2 | + 2.3 | − 20 | − 2.5 | − 0.5 | − 0.3 | − 0.8 | − 20.8 | − 8.4 | 190.6086 |
| Olburgen | 125.0469 | 205.9797 | ,9790 | + 80.8 | − 7.6 | − 7 | + 66.2 | − 2.4 | + 0.9 | − 1.5 | − 8.5 | + 3.9 | 205.9788 |
| | 323.2079 | | ,9346 | + 106.0 | + 21.3 | 0 | + 75.8 | + 0.1 | + 0.9 | + 0.0 | + 0.0 | + 14.8 | 646.9341 |
| | 323.7312 | | ,9391 | − 4.2 | − 7.6 | − 45 | − 5.3 | − 3.2 | − 2.5 | − 4.7 | − 49.7 | − 14.9 | 5 |
| | 646.9391 | 646.9391 | −,0045 | + 101.8 | + 13.7 | − 45 | + 70.5 | − 3.1 | − 1.6 | − 4.7 | − 49.7 | − 0.1 | 646.9346 |
| | 80.9328 | | | − 25.45 | − 3.42 | + 11.25 | − 17.62 | | | | − 12.4 | | |
| Olburgen | 1.4673 | 205.9790 | ,9790 | + 80.8 | − 7.6 | 0 | + 73.2 | − 2.4 | + 0.9 | − 1.5 | − 1.5 | − 0.4 | 205.9788 |
| Spankeren I | 142.5858 | 347.0975 | ,0970 | − 41.8 | − 45.8 | − 5 | − 92.6 | + 1.3 | + 5.4 | + 6.7 | + 1.7 | + 2.8 | 347.0977 |
| Geld. Toren | 227.5478 | 32.0595 | ,0593 | − 44.6 | + 24.6 | − 2 | − 22.0 | + 1.3 | − 2.9 | − 1.6 | − 3.6 | − 2.5 | 32.0592 |
| | 371.6009 | | ,1353 | + 80.8 | + 24.6 | 0 | + 73.2 | + 2.6 | + 6.3 | + 6.7 | + 6.7 | + 2.8 | 585.1357 |
| | 613.5351 | | ,1360 | − 86.4 | − 53.4 | − 7 | − 114.6 | − 2.4 | − 2.9 | − 3.1 | − 5.1 | − 2.9 | + 4 |
| | 985.1360 | 585.1360 | −,0007 | − 5.6 | − 28.8 | − 7 | − 41.4 | + 0.2 | + 3.4 | + 3.6 | − 3.4 | − 0.1 | 585.1353 |
| | | | | + 1.87 | + 9.60 | + 2.33 | + 13.80 | | | | − 1.1 | 333 | |
| | [α] / no' / [α]+no' / o' | — / — / [α+o'] / — | [ψ'] / [α+o'] / [f] / — | — / — / [a] / $-\frac{1}{n}[a]$ | — / — / [b] / $-\frac{1}{n}[b]$ | — / — / [f] / $-\frac{1}{n}[f]$ | — / — / [s] / $-\frac{1}{n}[s]$ | — / — / [aΔX] / — | — / — / [bΔY] / — | — / — / [Δψ] / — | — / — / [v+Δo] = nΔo / ΔO | — / — / [v] = 0 | [ψ] / [Δψ] / [ψ'] / [vv] |

## 2. Coëfficienten der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | [a | [b | [f |
|---|---|---|---|
| a] | + 14559 | − 842 | + 339 |
| b] | − 842 | + 2908 | + 318 |
| f] | + 339 | + 318 | + 379 |
| s] | + 14056 | + 2384 | + 1036 |
| s] | + 14056 | + 2385 | + 1037 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| X' | + 50626.24 | Y' | − 11279.58 |
| ΔX | 0.00 | ΔY | − 0.01 |
| X | + 50626.24 | Y | − 11279.59 |

## 3. Oplossing der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| [aa] | + 14559 | [af] | + 339 | [as] | + 14056 |
| I × [ab] | + 244 | I × [bf] | − 92 | I × [bs] | − 690 |
| [aa.1] | + 14315 | [af.1] | + 431 | [as.1] | + 14746 |
| $I = \frac{[ab]}{[bb]}$ | − 0.28955 | $\Delta X = -\frac{[af.1]}{[aa.1]}$ | − 0.0301 | $\Delta X - 1 = -\frac{[as.1]}{[aa.1]}$ | − 1.0301 |
| [bb] | + 2908 | [bf] | + 318 | [bs] | + 2384 |
| II × [ab] | + 49 | II × [af] | − 20 | II × [as] | − 813 |
| [bb.1] | + 2857 | [bf.1] | + 338 | [bs.1] | + 3197 |
| $II = \frac{[ab]}{[aa]}$ | − 0.05783 | $\Delta Y = -\frac{[bf.1]}{[bb.1]}$ | − 0.1183. | $\Delta Y - 1 = \frac{[bs.1]}{[bb.1]}$ | − 1.1190 |

## 4. Middelbare fouten.

| | |
|---|---|
| [ff] | + 379 |
| [af] ΔX | − 10 |
| [bf] ΔY | − 38 |
| [vv] | + 331 |
| $m^2$ [vv] : | 66 |
| m | 8 |
| $M_x^2 = \frac{m^2}{[aa.1]}$ | 0.0046 |
| $M_x$ | 0.07 |
| $M_y^2 = \frac{m^2}{[bb.1]}$ | 0.0231 |
| $M_y$ | 0.15 |

**Kadaster**
9934 - 42 - '38

Vereffening van de coördinaten van het punt: E (ongelijke gewichten)

$d = 3$ cm
$m = 5^{cc}$
$g = 1$ voor $\ell = 1.45$ km

Form.13. bl: 4

Form. 20 bl: 1

### 1. Correctie vergelijkingen enz

| Buitenrichtingen / Binnenrichtingen | Gemeten richtingen $\alpha + 200^g$ / $\alpha$ | $\alpha + o'$ | $\psi'$ | a | b | $f = \psi' - (\alpha + 200^g)$ / $f = \psi' - (\alpha + o')$ | s=a+b+f | g | ga | gb | gf | gs | aΔX | bΔY | Δψ | f+Δψ = v+Δo | g(v+Δo) | f+Δψ=v / v | gv |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geld Toren | 0.0000 | | 0860 | + 5.3 | − 42.1 | | | 1.1 | | | | | | | | | | | |
| Steenderen I | 207.2035 | | 2821 | − 0.3 | + 29.9 | | | 1.7 | | | | | | | | | | | |
| | 192.7965 | | 8039 | + 5.6 | − 72.0 | + 74 | + 7.6 | 0.7 | + 3.9 | − 50.4 | + 51.8 | + 5.3 | − 4.0 | − 59.6 | − 63.6 | | | + 10.4 | + 7.3 |
| Dieren II | 0.0000 | | 8405 | + 8.7 | − 12.3 | | | 4.2 | | | | | | | | | | | |
| Steenderen I | 238.4447 | | 2821 | − 0.3 | + 29.9 | | | 1.7 | | | | | | | | | | | |
| | 161.5553 | | 5584 | + 9.0 | − 42.2 | + 31 | − 22 | 1.2 | + 10.8 | − 50.6 | + 37.2 | − 2.6 | − 6.4 | − 35.0 | − 41.4 | | | − 10.4 | − 12.5 |
| Dieren II | 0.0000 | | 8405 | + 8.7 | − 12.3 | | | 4.2 | | | | | | | | | | | |
| Brummen I | 142.7961 | | 6332 | − 23.7 | + 1.3 | | | 2.6 | | | | | | | | | | | |
| | 257.2039 | | 2073 | + 32.4 | − 13.6 | + 34 | + 52.8 | 1.6 | + 51.8 | − 21.8 | + 54.4 | + 84.5 | − 23.2 | − 11.3 | − 34.5 | | | − 0.4 | − 0.6 |
| Doesburg I | 0.0000 | | 1121 | + 11.0 | − 3.0 | | | 5.2 | | | | | | | | | | | |
| Brummen I | 186.5241 | | 6332 | − 23.7 | + 1.3 | | | 2.6 | | | | | | | | | | | |
| | 213.4759 | | 4789 | + 34.7 | − 4.3 | + 30 | + 60.4 | 1.7 | + 59.0 | − 7.3 | + 51.0 | + 102.7 | − 24.8 | − 3.6 | − 28.4 | | | + 1.6 | + 2.7 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | 210 | |
| | [α] no' [α]+no' o' | [α+o'] | [ψ] [α+o] [f] | [a] | [b] | [f] | [s] | [g] | [ga] −[ga]/[g] | [gb] −[gb]/[g] | [gf] −[gf]/[g] | [gs] −[gs]/[g] | [aΔX] −[ga]/[g]ΔX | [bΔY] −[gb]/[g]ΔY | [Δψ] | [v+Δo] | [g]Δo Δo | [v] | [gv]=0 [gvv] |

### 2. Coëfficienten der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | [ga | [gb | [gf |
|---|---|---|---|
| a] | + 3845 | − 1695 | + 4155 |
| b] | − 1695 | + 6090 | − 6258 |
| f] | + 4155 | − 6258 | + 8366 |
| s] | + 6305 | − 1863 | + 6263 |
| s] | + 6305 | − 1864 | + 6265 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| X' | + 52718,13 | Y' | − 9999,42 |
| ΔX | − 0,07 | ΔY | + 0.08 |
| X | + 52718,06 | Y | − 9999,34 |

### 3. Oplossing der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| [gaa] | + 3845 | [gaf] | + 4155 | [gas] | + 6305 |
| I×[gab] | + 472 | I×[gbf] | + 1742 | I×[gbs] | + 519 |
| [gaa.1] | + 3373 | [gaf.1] | + 2413 | [gas.1] | + 5786 |
| I = [gab]/[gbb] | − 0.278325 | ΔX = −[gaf.1]/[gaa.1] | − 0.7154 | ΔX−1 = [gas.1]/[gaa.1] | − 1.7154 |
| [gbb] | + 6090 | [gbf] | − 6258 | [gbs] | − 1863 |
| II×[gab] | + 747 | II×[gaf] | − 1832 | II×[gas] | − 2779 |
| [gbb.1] | + 5343 | [gbf.1] | − 4426 | [gbs.1] | + 916 |
| II = [gab]/[gaa] | − 0.440832 | ΔY = −[gbf.1]/[gbb.1] | + 0.8284 | ΔY−1 = [gbs.1]/[gbb.1] | − 0.1714 |

### 4. Middelbare fouten.

| | |
|---|---|
| [gff] | + 8366 |
| [gaf] ΔX | − 2972 |
| [gbf] ΔY | − 5184 |
| [gvv] | + 210 |
| $\mu^2$=[gvv] : | + 105 |
| $\mu$ | 10 |
| $M_x^2 = \mu^2/[gaa.1]$ | 0.0311 |
| $M_x$ | 0.18 dm. |
| $M_y^2 = \mu^2/[gbb.1]$ | 0.0197 |
| $M_y$ | 0.14 dm. |

### 5. ψ = ψ' + Δψ

7975
5543
2039
4761

Kadaster
9934 - 43 - '38

Vereffening van de coördinaten van het punt: C (ongelijke gewichten)

Form.13. bl: 3

Form. 20 bl: 2

### 1. Correctie vergelijkingen enz.

| Buitenrichtingen | Gemeten richtingen $\alpha + 200^g$ | | $\psi'$ | a | b | $f = \psi' - (\alpha + 200^g)$ | s=a+b+f | g | ga | gb | gf | gs | a ΔX | b ΔY | Δψ | | | f+Δψ=v | gv |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Binnenrichtingen** | **Gemeten richtingen α** | **α+o'** | **ψ'** | **a** | **b** | **f=ψ'-(α+o')** | **s=a+b+f** | **g** | **ga** | **gb** | **gf** | **gs** | **a ΔX** | **b ΔY** | **Δψ** | **f+Δψ = v+Δo** | **g(v+Δo)** | **v** | **gv** |
| Steenderen I | 35.2934 | | 2938 | − 25.8 | + 16.0 | + 4 | | 1.7 | | | | | + 8.2 | − 5.9 | + 2.3 | | | + 6.3 | + 10.7 |
| Steenderen I | 0.0000 | 2939 | 2938 | − 25.8 | + 16.0 | − 1 | | 1.7 | tezamen vereffend | | | | + 8.2 | − 5.9 | + 2.3 | + 1.3 | + 2.2 | − 4.9 | − 8.3 |
| Baak | 18.9619 | 2558 | 2565 | − 8.0 | + 9.1 | + 7 | | 4.4 | | | | | + 2.5 | − 3.3 | − 0.8 | + 6.2 | + 27.3 | 0.0 | 0.0 |
| N | 196.5951 | 8890 | 8813 | + 124.1 | − 67.9 | − 77 | | 6.0 | met punt N | | | | {− 39.5 / + 36.6 | + 25.0 / + 66.2 | + 88.3 | + 11.3 | + 67.8 | + 5.1 | + 30.6 |
| Doesburg I | 203.2794 | 5733 | 5734 | + 11.9 | − 8.2 | + 1 | | 4.0 | | | | | − 3.8 | + 3.0 | − 0.8 | + 0.2 | + 0.8 | − 6.0 | − 24.0 |
| Spankeren I | 283.3425 | 6364 | 6364 | − 4.5 | − 15.0 | 0 | | 3.7 | | | | | + 14 | + 5.5 | + 6.9 | + 6.9 | + 25.5 | + 0.7 | + 2.6 |
| | 702.1789 | | 26414 | + 136.0 | + 25.1 | + 8 | | | | | | | + 48.7 | + 99.7 | + 97.5 | | | | + 33.2 |
| | 4695 | | 26484 | − 38.3 | − 91.1 | − 78 | | | | | | | − 43.3 | − 9.2 | − 1.6 | | | | − 32.3 |
| | 6484 | 26484 | − 70 | + 97.7 | − 66.0 | − 70 | | 19.8 | | | | | + 5.4 | + 90.5 | + 95.9 | + 25.9 | + 123.6 | | + 0.9 |
| | 2939 | | | | | | | | − 35.17 | + 21.64 | + 21.66 | | | | | | + 6.2 | 410.0 | |
| | [α] no' [α]+no' | [α+o'] | [ψ'] [α+o] [f] | [a] | [b] | [f] | [s] | [g] | [ga] − [ga]/[g] | [gb] − [gb]/[g] | [gf] − [gf]/[g] | [gs] − [gs]/[g] | [a ΔX] − [ga]/[g] ΔX | [b ΔY] − [gb]/[g] ΔY | [Δψ] | [v+Δo] | [g] Δo Δo | [v] | [gv] = 0 |
| | o' | | | | | | | | | | | | | | | | | [gvv] | |

### 2. Coëfficienten der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | [ga | [gb | [gf |
|---|---|---|---|
| a] | | | |
| b] | | | |
| f] | | | |
| s] | | | |
| s] | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| X' | + 53746.86 | Y' | − 11756.60 |
| ΔX | − 0.03 | ΔY | − 0.04 |
| X | + 53746.83 | Y | − 11756.64 |

### 3. Oplossing der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| [gaa] I×[gab] [gaa.1] | | [gaf] I×[gbf] [gaf.1] | | [gas] I×[gbs] [gas.1] | |
| $I = \frac{[gab]}{[gbb]}$ | | $\Delta X = -\frac{[gaf.1]}{[gaa.1]}$ | − 0.31861 | $\Delta X\text{-}1 = \frac{[gas.1]}{[gaa.1]}$ | |
| [gbb] II×[gab] [gbb.1] | | [gbf] II×[gaf] [gbf.1] | | [gbs] II×[gas] [gbs.1] | |
| $II = \frac{[gab]}{[gaa]}$ | | $\Delta Y = -\frac{[gbf.1]}{[gbb.1]}$ | − 0.36751 | $\Delta Y\text{-}1 = \frac{[gbs.1]}{[gbb.1]}$ | |

### 4. Middelbare fouten

| | |
|---|---|
| [gff] [gaf] ΔX [gbf] ΔY | |
| [gvv] | |
| $\mu^2 = [gvv] :$ $\mu$ | $13^{cc}$ |
| $M_x^2 = \frac{\mu^2}{[gaa.1]}$ $M_x$ | 0.33 dm. |
| $M_y^2 = \frac{\mu^2}{[gbb.1]}$ $M_y$ | 0.40 dm |

### 5. ψ = ψ' + Δψ

2940

2940
2564
8901
5733
6371

Kadaster
9934 - 44 - '38

*Vereffening van de coördinaten van het punt:* N *(ongelijke gewichten)*

Form.13. bl: 3

Form. 20
bl: 3

### 1. Correctie vergelijkingen enz.

| Buitenrichtingen | Gemeten richtingen α + 200ᵍ | | ψ' | a | b | f = ψ' − (α + 200ᵍ) | s = a+b+f | g | ga | gb | gf | gs | aΔX | bΔY | Δψ | | | f+Δψ=v | gv |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Binnenrichtingen** | **Gemeten richtingen α** | **α + o'** | **ψ'** | **a** | **b** | **f = ψ' − (α + o')** | **s = a+b+f** | **g** | **ga** | **gb** | **gf** | **gs** | **aΔX** | **bΔY** | **Δψ** | **f + Δψ = = v + Δo** | **g(v + Δo)** | **v** | **gv** |
| Drempt | 0.0000 | 4325 | 4326 | + 15.3 | − 1.1 | + 1 | | 3.8 | tezamen vereffend | | | | − 4.5 | − 1.0 | − 5.5 | − 4.5 | − 17.1 | + 3.8 | + 14.4 |
| Dieren II | 91.3701 | 8026 | 8038 | + 1.0 | − 14.9 | + 12 | | 3.9 | met punt C | | | | − 0.3 | − 14.5 | − 14.8 | − 2.8 | − 10.9 | + 5.5 | + 21.5 |
| Geld. Toren | 140.5681 | 0006 | 0006 | − 13.7 | − 16.0 | 0 | | 2.7 | | | | | + 4.0 | − 15.6 | − 11.6 | − 11.6 | − 31.3 | − 3.3 | − 8.9 |
| C | 227.4589 | 8914 | 8813 | − 124.1 | + 67.9 | − 101 | | 6.0 | | | | | + 36.6<br>− 39.5 | + 66.2<br>+ 25.0 | + 88.3 | − 12.7 | − 76.2 | − 4.4 | − 26.4 |
| | 459.3971 | | 21183 | + 16.3 | + 67.9 | + 13 | | | | | | | + 40.6 | + 91.2 | + 88.3 | | | | + 35.9 |
| | 7300 | | 21271 | − 137.8 | − 32.0 | − 101 | | | | | | | − 44.3 | − 31.1 | − 31.9 | | | | − 35.3 |
| | 1271 | 21271 | − 88 | − 121.5 | + 35.9 | − 88 | | 16.4 | − | | | | − 3.7 | + 60.1 | + 56.4 | − 31.6 | − 135.5 | | + 0.6 |
| | 4325 | | | | | | | | − 45.40 | + 24.84 | + 33.87 | | | | | | − 8.3 | 318.5 | |
| | [α]<br>no'<br>[α]+no'<br>o' | [α + o'] | [ψ']<br>[α + o]<br>[f] | [a] | [b] | [f] | [s] | [g] | [ga]<br>− [ga]/[g] | [gb]<br>− [gb]/[g] | [gf]<br>− [gf]/[g] | [gs]<br>− [gs]/[g] | [aΔX]<br>− [ga]/[g] ΔX | [bΔY]<br>− [gb]/[g] ΔY | [Δψ] | [v+Δo] | [g] Δo<br>Δo | [v] | [gv] = 0<br>[gvv] |

### 2. Coëfficienten der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | [ga | [gb | [gf |
|---|---|---|---|
| a] | | | |
| b] | | | |
| f] | | | |
| s] | | | |
| s] | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| X' | + 53530.78 | Y' | − 121151.39 |
| ΔX | − 0.03 | ΔY | + 0.10 |
| X | + 53530.75 | Y | − 121151.29 |

### 3. Oplossing der gereduceerde normaalvergelijkingen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| [gaa]<br>I×[gab]<br>[gaa.1] | | [gaf]<br>I×[gbf]<br>[gaf.1] | | [gas]<br>I×[gbs]<br>[gas.1] | |
| I = [gab]/[gbb] | | ΔX = − [gaf.1]/[gaa.1] | − 0.29473 | ΔX−1 = [gas.1]/[gaa.1] | |
| [gbb]<br>II×[gab]<br>[gbb.1] | | [gbf]<br>II×[gaf]<br>[gbf.1] | | [gbs]<br>II×[gas]<br>[gbs.1] | |
| II = [gab]/[gaa] | | ΔY = − [gbf.1]/[gbb.1] | + 0.97502 | ΔY−1 = [gbs.1]/[gbb.1] | |

### 4. Middelbare fouten.

| | |
|---|---|
| [gff]<br>[gaf] ΔX<br>[gbf] ΔY | |
| [gvv]<br>μ² = [gvv] : | 13ᶜᶜ |
| $M_x^2 = \frac{\mu^2}{[gaa.1]}$ $M_x$ | 0.22 dm |
| $M_y^2 = \frac{\mu^2}{[gbb.1]}$ $M_y$ | 0.35 dm |

### 5. ψ = ψ' + Δψ

| |
|---|
| 4321 |
| 8023 |
| 9994 |
| 8901 |

Kadaster
9934 - 45 - '38

Vereffening van de coördinaten van de punten: C en N

Form. 13 bl. 3

Correctie vergelijkingen.

| a | b | c | d | f | s | g | ga | gb | gc | gd | gf | gs |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| − 25.8 | + 16.0 | − | − | + 4 | − 5.8 | 1.7 | − 43.9 | + 27.2 | − | − | + 6.8 | − 9.9 |
| − 25.8 | + 16.0 | − | − | − 1 | − 10.8 | 1.7 | − 43.9 | + 27.2 | − | − | − 1.7 | − 18.4 |
| − 8.0 | + 9.1 | − | − | + 7 | + 8.1 | 4.4 | − 35.2 | + 40.0 | − | − | + 30.8 | + 35.6 |
| + 124.1 | − 67.9 | − 124.1 | + 67.9 | − 77 | − 77.0 | 6.0 | + 744.6 | − 407.4 | − 744.6 | + 407.4 | − 462.0 | − 462.0 |
| + 11.9 | − 8.2 | − | − | + 1 | + 4.7 | 4.0 | + 47.6 | − 32.8 | − | − | + 4.0 | + 18.8 |
| − 4.5 | − 15.0 | − | − | 0 | − 19.5 | 3.7 | − 16.7 | − 55.5 | − | − | 0.0 | − 72.1 |
| + 136.0 | + 25.1 | | | + 8 | + 12.8 | | + 792.2 | + 67.2 | | | + 34.8 | + 54.4 |
| − 38.3 | − 91.1 | | | − 78 | − 107.3 | | − 95.8 | − 495.7 | | | − 463.7 | − 552.5 |
| + 97.7 | − 66.0 | − 124.1 | + 67.9 | − 70 | − 94.5 | 19.8 | + 696.4 | − 428.5 | − 744.6 | + 407.4 | − 428.9 | − 498.1 |
| | | | | | | | − 35.17 | + 21.64 | + 37.61 | − 20.58 | + 21.66 | + 25.16 |
| [a] | [b] | [c] | [d] | [f] | [s] | [g] | [ga] − [ga]/[g] | [gb] − [gb]/[g] | [gc] − [gc]/[g] | [gd] − [gd]/[g] | [gf] − [gf]/[g] | [gs] − [gs]/[g] |

| a | b | c | d | f | s | g | ga | gb | gc | gd | gf | gs |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| − | − | + 15.3 | − 1.1 | + 1 | + 15.2 | 3.8 | − | − | + 58.1 | − 4.2 | + 3.8 | + 57.8 |
| − | − | + 1.0 | − 14.9 | + 12 | − 1.9 | 3.9 | − | − | + 3.9 | − 58.1 | + 46.8 | − 7.4 |
| − | − | − 13.7 | − 16.0 | 0 | − 29.7 | 2.7 | − | − | − 37.0 | − 43.2 | 0.0 | − 80.2 |
| + 124.1 | − 67.9 | − 124.1 | + 67.9 | − 101 | − 101.0 | 6.0 | + 744.6 | − 407.4 | − 744.6 | + 407.4 | − 606.0 | − 606.0 |
| | | + 16.3 | + 67.9 | + 13 | + 15.2 | | | | + 62.0 | + 407.4 | + 50.6 | + 57.8 |
| | | − 137.8 | − 32.0 | − 101 | − 132.6 | | | | − 781.6 | − 105.5 | − 606.0 | − 693.6 |
| + 124.1 | − 67.9 | − 121.5 | + 35.9 | − 88 | − 117.4 | 16.4 | + 744.6 | − 407.4 | − 719.6 | + 301.9 | − 555.4 | − 635.8 |
| | | | | | | | − 45.40 | + 24.84 | + 43.88 | − 18.41 | + 33.87 | + 38.77 |
| [a] | [b] | [c] | [d] | [e] | [f] | [g] | [ga] − [ga]/[g] | [gb] − [gb]/[g] | [gc] − [gc]/[g] | [gd] − [gd]/[g] | [gf] − [gf]/[g] | [gs] − [gs]/[g] |

Coëfficienten der gereduceerde normaal vergelijkingen.

| | | |
|---|---|---|
| [gaa] | + | 129701 |
| [gab] | − | 69416 |
| [gac] | − | 125945 |
| [gad] | + | 73077 |
| [gaf] | − | 92566 |
| [gas] | − | 85149 |
| [gas] | − | 85156 |
| [gab] | − | 69416 |
| [gbb] | + | 38268 |
| [gbc] | + | 67124 |
| [gbd] | − | 39006 |
| [gbf] | + | 49766 |
| [gbs] | + | 46736 |
| [gbs] | + | 46742 |
| [gac] | − | 125945 |
| [gbc] | + | 67124 |
| [gcc] | + | 126624 |
| [gcd] | − | 72075 |
| [gcf] | + | 92143 |
| [gcs] | + | 87871 |
| [gcs] | + | 87880 |
| [gad] | + | 73077 |
| [gbd] | − | 39006 |
| [gcd] | − | 72075 |
| [gdd] | + | 42944 |
| [gdf] | − | 54169 |
| [gds] | − | 49229 |
| [gds] | − | 49233 |
| [gaf] | − | 92566 |
| [gbf] | + | 49766 |
| [gcf] | + | 92143 |
| [gdf] | − | 54169 |
| [gff] | + | 69493 |
| [gfs] | + | 64667 |
| [gfs] | + | 64672 |

*Oplossing van een stelsel van 4 normaalvergelijkingen (rekenmachine)*

Form.13 bl 3

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a=A | 1 | 1 | + 129701 | − 69416 | − 125945 | + 73077 | − 92566 | − 85149 | |
| I | +0.002777 | +0.002777 | +0.0027767 | −192.747 | −349.711 | +202.913 | −257.028 | −236.433 | |
| b | 1 | 0 | 1 | + 38268 | + 67124 | − 39006 | + 49766 | + 46736 | |
| | +0.53526 | +0.53526 | 0 | − 37151 | − 67406 | + 39111 | − 49541 | − 45572 | |
| B | +1.53526 | +0.53526 | 1 | + 1117 | − 282 | + 105 | + 225 | + 1164 | c |
| II | +0.045936 | +0.016015 | +0.029921 | +0.029208 | −8.43767 | +3.14168 | +6.73218 | +34.8278 | |
| c | 1 | 0 | 0 | 1 | + 126624 | − 72075 | + 92143 | + 87871 | |
| | +0.97115 | +0.97115 | 0 | 0 | − 122298 | + 70961 | − 89886 | − 82683 | |
| | +0.38759 | +0.13513 | +0.25246 | 0 | − 71 | + 27 | + 57 | + 294 | |
| C | +2.35874 | +1.10628 | +0.25246 | 1 | + 4255 | − 1087 | + 2314 | + 5482 | c |
| III | +0.036160 | +0.016960 | +0.003870 | +0.015330 | +0.0153303 | −16.6640 | +35.4743 | +84.0407 | |
| d | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | + 42944 | − 54169 | − 49229 | |
| | −0.56349 | −0.56349 | 0 | 0 | 0 | − 41174 | + 52154 | + 47975 | |
| | −0.14432 | −0.05031 | −0.09400 | 0 | 0 | − 10 | − 21 | − 109 | |
| | +0.60257 | +0.28262 | +0.06449 | +0.25546 | 0 | − 278 | + 591 | + 1400 | |
| D | +0.89476 | −0.33118 | −0.02951 | +0.25546 | 1 | + 1482 | − 1445 | + 37 | c |
| IV | +0.023242 | −0.008603 | −0.000767 | +0.006636 | +0.025976 | +0.0259762 | −37.5356 | +0.9611 | |
| f | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | + 69493 | + 64667 | |
| | +0.71377 | +0.71377 | 0 | 0 | 0 | | − 66063 | − 60770 | |
| | −0.30925 | −0.10782 | −0.20143 | 0 | 0 | | − 45 | − 234 | |
| | −1.28275 | −0.60164 | −0.13729 | −0.54382 | 0 | | − 1258 | − 2981 | |
| | +0.87240 | −0.32292 | −0.02879 | +0.24909 | +0.97502 | | − 1409 | + 36 | |
| | −0.00583 | −0.31861 | −0.36751 | −0.29473 | +0.97502 | | + 718 | 718 | c |
| | Σ | x | y | z | t | | [vv] | [vv] | |

$\mu^2 = \frac{[vv]}{4} = 179.5$ $\mu = 13^{cc}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{xx}$ | + 0.0006258 | $Q_{yx}$ | + 0.0005514 | $Q_{zx}$ | + 0.0002029 | $Q_{tx}$ | − 0.0002235 |
| $Q_{xy}$ | + 0.0005514 | $Q_{yy}$ | + 0.0009108 | $Q_{zy}$ | + 0.0000542 | $Q_{ty}$ | − 0.0000199 |
| $Q_{xz}$ | + 0.0002029 | $Q_{yz}$ | + 0.0000542 | $Q_{zz}$ | + 0.0002790 | $Q_{tz}$ | + 0.0001724 |
| $Q_{xt}$ | − 0.0002235 | $Q_{yt}$ | − 0.0000199 | $Q_{zt}$ | + 0.0001724 | $Q_{tt}$ | + 0.0006748 |
| $Q_{x\Sigma}$ | + 0.0011567 | $Q_{y\Sigma}$ | + 0.0014966 | $Q_{z\Sigma}$ | + 0.0007086 | $Q_{t\Sigma}$ | + 0.0006037 |

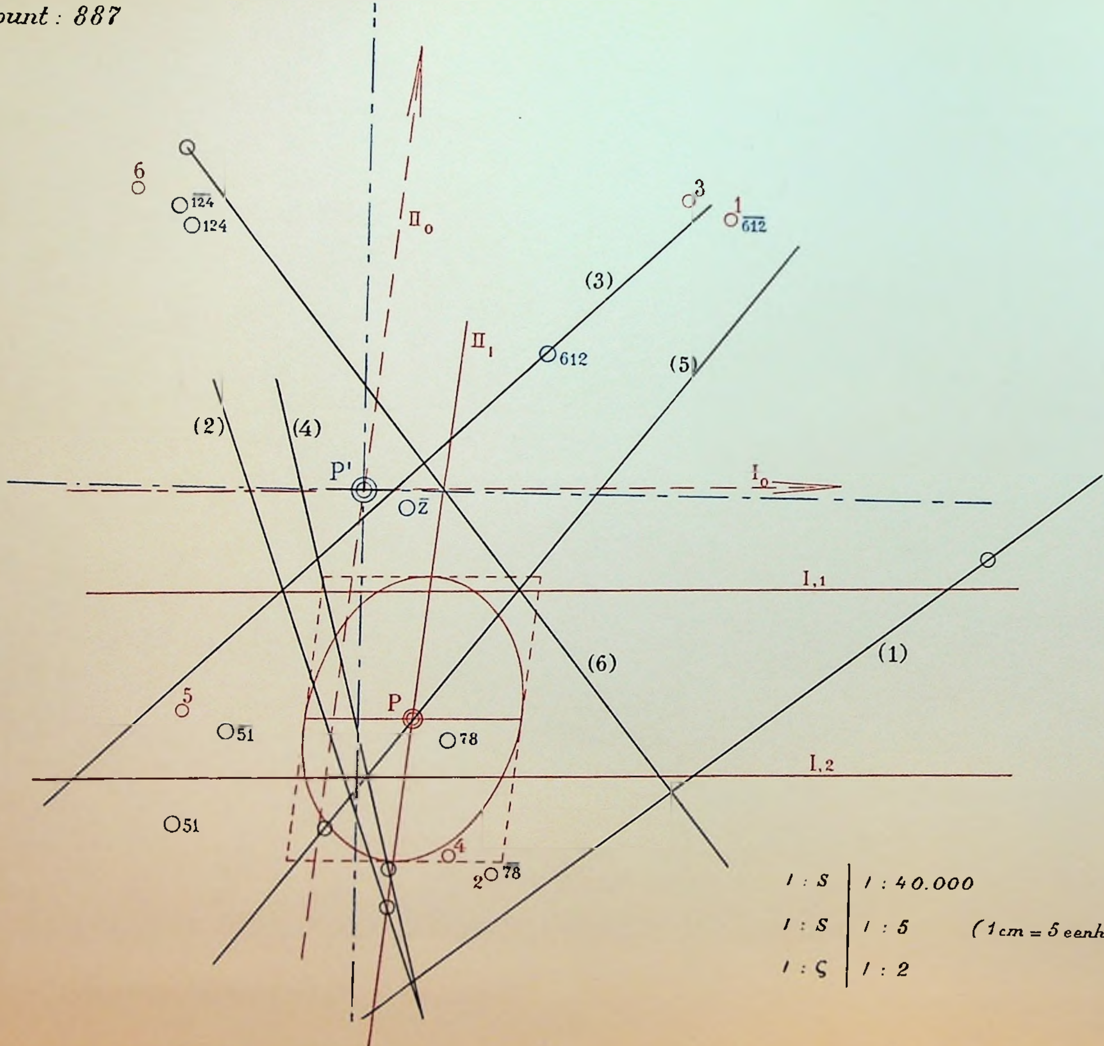
| | | | |
|---|---|---|---|
| $M_x^2$ | 0.1123 | $M_x$ | 0.33 |
| $M_y^2$ | 0.1635 | $M_y$ | 0.40 |
| $M_z^2$ | 0.0501 | $M_z$ | 0.22 |
| $M_t^2$ | 0.1211 | $M_t$ | 0.35 |

**Kadaster**
9934 - 47 - '38

*Vereffening van punt : 887*

*Form. nº 26*

*Form.13, bladz:*




| *1 : S* | *1 : 40.000* | |
|---|---|---|
| *1 : S* | *1 : 5* | *(1 cm = 5 eenh van a)* |
| *1 : ς* | *1 : 2* | |

**Formulier no. 26**
9934 - 48 - '38

# Hulpberekeningen bij de grafische vereffening van punt: 887

## 1. Correctie vergelijkingen, reductie, enz.

| Nº | Buitenrichtingen | Gemeten richtingen $\alpha + 200^g$ | – | $\psi'$ | – | g | – | $f = \psi' - (\alpha + 200^g)$ | Vg | fVg | vVg | gvv |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº | Binnenrichtingen | Gemeten richtingen $\alpha$ | $\alpha + o'$ | $\psi'$ | $f = \psi' - (\alpha + o')$ | g | gf | $f' = f - \frac{[gf]}{[g]}$ | Vg | f'Vg | vVg | gvv |
| 1 | 612 | 58,0827 | | 0885 | | 1 | | +58 | 1 | +58 | +29 | 861 |
| 2 | 78 | 178,7123 | | 7136 | | 1 | | +13 | 1 | +13 | +10 | 100 |
| 3 | 612 | 60,2890 | 58,0885 | 0885 | 0 | 1 | 0 | +3 | 1 | +3 | −24 | 576 |
| 4 | 78 | 180,9137 | 178,7132 | 7136 | +4 | 1 | +4 | +7 | 1 | +7 | +6 | 36 |
| 5 | 51 | 234,2812 | 232,0807 | 0788 | −19 | 1 | −19 | −16 | 1 | −16 | 0 | 0 |
| 6 | 124 | 364,3297 | 362,1292 | 1296 | +4 | 1 | +4 | +7 | 1 | +7 | +18 | 324 |
| | [α] | ,8136 | | 0105 | −11 | 4 | −11 | | | | | 1897 |
| | no' | 1980 | | −11 | | | −3 | | | | | 632 |
| | [α]+no' | 0116 | 0116 | 0116 | | | | | | | | 25 |
| | o' | 397,7995 | [α+o'] | [ψ'] [f] [α+o'] | [f] | [g] | [gf] $\frac{[gf]}{[g]}$ | – – – | – – – | – – – | – – – | [gvv] $\mu^2$ $\mu$ |

## 2. Hulpberekeningen en middelbare fouten

| Nº | $a_I$ | $a_I^2$ | $\xi_{I,1}$ | $\xi_{I,2}$ | $a_I^2\xi_{I,1}$ | $a_I^2\xi_{I,2}$ | $a_{II}$ | $a_{II}^2$ | $\xi_{II,1}$ | $\xi_{II,2}$ | $a_{II}^2\xi_{II,1}$ | $a_{II}^2\xi_{II,2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | −25 | 620 | 0,00 | 0,00 | 0 | 0 | +24 | 580 | 100 | | 580 | |
| 4 | +32 | 1020 | 0,07 | 0,50 | 71 | 510 | +21 | 120 | 23 | | 28 | |
| 5 | +19 | 360 | 0,41 | 0,50 | 128 | 180 | −13 | 170 | 51 | | 87 | |
| 6 | −26 | 680 | 0,40 | 1,00 | 272 | 680 | −23 | 530 | 91 | | 482 | |
| 1 | 23 | 530 | 1,14 | 1,06 | 603 | 562 | 28 | 780 | 0 | | 0 | |
| 2 | 33 | 1090 | 0 | 0,46 | 0 | 501 | 15 | 220 | 18 | | 40 | |
| | | 4300 | | | 1074 | 2433 | | 2400 | | | 1217 | |
| | | | $\frac{[a_I^2\xi_{I,i}]}{[a_I^2]}$ | | 0.250 | 0.566 | | | $\frac{[a_{II}^2\xi_{II,i}]}{[a_{II}^2]}$ | | 0.507 | |

$$M_I^2 = \frac{\mu^2}{[a_I^2]} = \frac{632}{4300} = 0.1470$$

$M_I$ = 0,38 dm

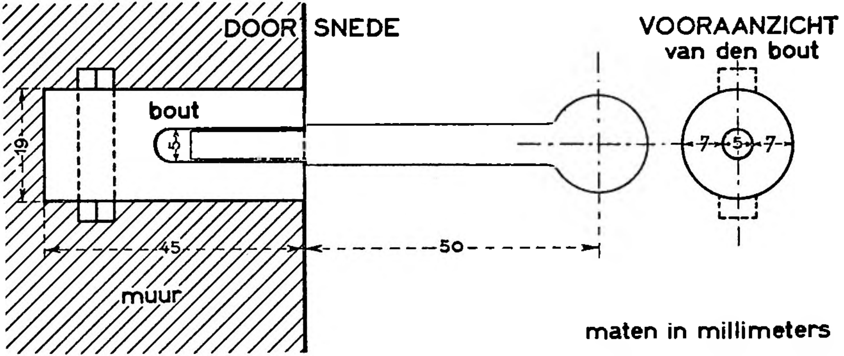
$$M_{II}^2 = \frac{\mu^2}{[a_{II}^2]} = \frac{632}{2400} = 0.2633$$

$M_{II}$ = 0,51 dm

## 3. Uitkomsten

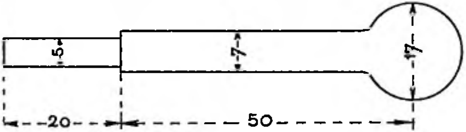
| | | |
|---|---|---|
| X' | + | 1591,58 |
| ΔX | + | 0,02 |
| X | + | 1591,60 |
| Y' | + | 4604,68 |
| ΔY | – | 0,08 |
| Y | + | 4604,60 |

# VASTLEGGINGSBOUT




maten in millimeters

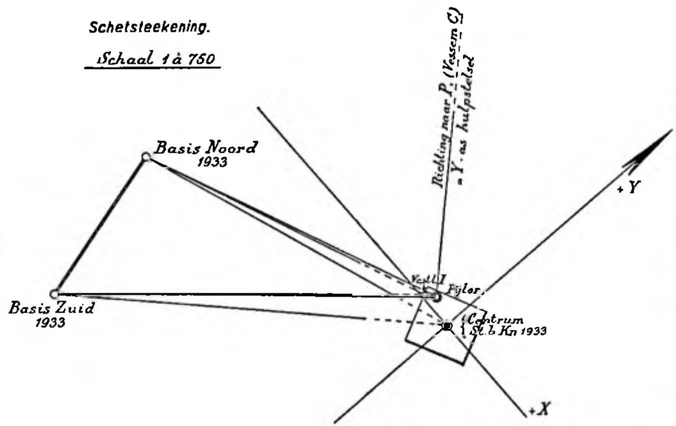
losse stift te plaatsen in den bout



II

## Schetsteekening.

*Schaal 1 à 750*




## 1 Berekening van driehoeken.

| Hoekpunten. | Hoeken. | Corr. | Gecorr. hoeken. | (log) sin / (log) m | (log) overst zijde |
|---|---|---|---|---|---|
| Vastlegging I | | | 29.1368 | 9.645293 | 1,397246 |
| Basis N. 1933 | 107,7099 | + 2 | 107,7101 | 9.996807 | 1,748760 |
| Basis Z. 1933 | 63.1529 | + 2 | 63.1531 | 9.922791 | 1.674744 |
| | | | 200,0000 | 1.751953 | |
| Pyler | 28.3018 | + 2 | 28,3020 | 9,633536 | 1,397246 |
| Basis N. 1933 | 108.7463 | + 2 | 108,7465 | 9.995888 | 1,759598 |
| Basis Z. 1933 | 62,9513 | + 2 | 62,9515 | 9.921889 | 1,685599 |
| | 199.9994 | + 6 | 200,0000 | 1,763710 | |
| St. b Kn 1933 | | | 27.6110 | 9.623500 | 1,397246 |
| Basis N. 1933 | 104,5077 | + 2 | 104,5079 | 9.998910 | 1,772656 |
| Basis Z. 1933 | 67.8809 | + 2 | 67.8811 | 9.942209 | 1,715955 |
| | | | 200,0000 | 1,773746 | |
| | | | | | |
| | | | | | |

## 2 Verzamelstaat.

| Punten. | Gemeten richtingen. | Corr. | Gecorrigeerde richtingen. | Georiënt. richtingen Θ in hulpstelsel | Georiënt richtingen ψ = Θ + ω | (log) l |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Basis Z. 1933* | | | | | | |
| Basis N. 1933 | 0.0000 | − 1 | 399.9999 | 32.9788 | 383,2837 | 1,397246 |
| Vastlegging I | 63.1529 | + 1 | 63.1530 | 96.1319 | 46.4368 | 1,748760 |
| Pyler | 62.9513 | + 1 | 62.9514 | 95.9303 | 46,2352 | 1,759598 |
| St. b Kn 1933 | 67.8809 | + 1 | 67.8810 | 100.8599 | 51,1648 | 1,772656 |
| | | | 32.9789 | 350,3049 | | |
| *Basis N. 1933* | | | | | | |
| Basis Z. 1933 | 0.0000 | + 1 | 0.0001 | 232.9788 | 183,2837 | 1,397246 |
| Vastlegging I | 292.2901 | − 1 | 292.2900 | 125,2687 | 75,5736 | 1,674744 |
| Pyler | 291.2537 | − 1 | 291 2536 | 124,2323 | 74,5372 | 1,685599 |
| St. b Kn 1933 | 295.4923 | − 1 | 295.4922 | 128.4709 | 78.7758 | 1,715955 |
| | | | 232.9787 | 350,3049 | | |
| *Pyler* | | | | | | |
| Vessem C=P | 0,0000 | − | 0,0000 | 0,0000 | 350,3049 | |
| Basis Z. 1933 | 295.9304 | − 1 | 295.9303 | 295.9303 | 246,2352 | 1,759598 |
| Basis N. 1933 | 324,2322 | + 1 | 324,2323 | 324,2323 | 274,5372 | 1,685599 |
| | | | 0,0000 | 350,3049 | | |

**Kadaster**

9934 - 51 - '38

### 3. Berekening van den coördinaat ξ

| Punten richtingen Θ | (log) sin Θ<br>(log) l<br>(log l sin Θ) | ξ |
|---|---|---|
| Pijler (R) | | 0,000 |
| 295,9303 | 9,99112n<br>1,75958<br>1,75871 0n | − 57,373 |
| Basis Zuid | | − 57,373 |
| 96,1319 | 9,99198<br>1,74760<br>1,747958 | + 55,970 |
| Vastlegging I (K) | | − 1,403 |
| 325,2687 | 9,96485 2n<br>1,67474 4<br>1,63959 6n | − 43,611 |
| Basis Noord | | − 45,014 |
| 124,2323 | 9,967748<br>1,685599<br>1,653347 | + 45,014 |
| Pijler (R) | | 0,000 |
| | | $\xi_K$ = − 1,403 |

### 4 Berekening van oriënteering ω

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_p$ | − 6802,92 | $Y_p$ | − 82096,73 |
| $X_c$ | − 2511,61 | $Y_c$ | − 86426,69 |
| $x_k$ | − 5,27 | $y_k$ | + 0,67 |
| $X_k$ | − 2516,88 | $Y_k$ | − 86426,02 |
| $x=X_p-X_k$ | − 4286,04 | $y=Y_p-Y_k$ | + 4329,29 |
| (log x)<br>(log y) | 3,63205 6n<br>3,63641 7 | (log) $\xi_k$<br>(log) p<br>(colog) KP | 0,14705 8n<br>5,80388 0<br>6,21523 8 |
| (log) tg $\overline{KP}$ | 9,99563 9n | (log d') | 2,16617 6n |
| $\overline{KP}$ | 350,3196 | d' | − 147 |
| (log sin $\overline{KP}$)<br>(log cos $\overline{KP}$) | 9,84729 4<br>9,85165 4 | Δ d | 0 |
| | | d | − 147 |
| (log) KP | 3,78476 2 | $\overline{KP}$ | 350,3196 |
| | | $d+\overline{KP}=\omega=\overline{RP}$ | 350,3049 |

### 5. Berekening van coördinatenverschillen met centrum x, y.

| Punten richtingen ψ | (log) sin ψ<br>(log) l<br>(log) cos ψ | (log) l sin ψ<br>(log) l cos ψ | x | y |
|---|---|---|---|---|
| Centrum | | | 0,0000 | 0,0000 |
| 308,0367 | 9,99653 n<br>0,72550<br>9,10004 | 0,72203 n<br>9,82554 | − 5,2726 | + 0,6692 |
| Vastlegging I | | | − 5,2726 | + 0,6692 |
| 275,5736 | 9,96721 6n<br>1,67474 4<br>9,57327 0n | 1,64196 0n<br>1,24801 4n | − 43,8490 | − 17,7017 |
| Basis Noord | | | − 49,1216 | − 17,0325 |
| 74,5372 | 9,96429 4<br>1,68559 9<br>9,59038 4 | 1,64989 3<br>1,27598 3 | + 44,6573 | + 18,8792 |
| Pijler | | | − 4,4643 | + 1,8467 |
| 246,2352 | 9,82222 0n<br>1,75959 8<br>9,87370 6n | 1,58181 8n<br>1,63330 4n | − 38,1784 | − 42,9837 |
| Basis Zuid | | | − 42,6427 | − 41,1370 |
| 51,1648 | 9,85728 8<br>1,77265 6<br>9,84139 2 | 1,62994 4<br>1,61404 8 | + 42,6525 | + 41,1195 |
| St. b. Kn. 1933 | | | + 0,0098 | − 0,0175 |
| 278,7758 | 9,97540 4<br>1,71595 5<br>9,51487 6 | 1,69135 9n<br>1,23083 1n | − 49,1314 | − 17,0150 |
| Basis Noord | | | − 49,1216 | − 17,0325 |

### 6 Berekening van richting en afstand.

| Punt. | Pijler |
|---|---|
| x | − 4,464 |
| y | + 1.847 |
| (log x) | 0,64972n |
| (log y) | 0,26647 |
| (log) tg ψ | 0,38325n |
| ψ | 324,9754 |
| (log sin ψ) | 9,96568 |
| (log cos ψ) | 9,58243 |
| (log) r | 0,68404 |
| St. b. Kn. 1933 | Basis Noord |
| Identiek | − 49,122<br>− 17,032<br>1,69128n<br>1,23127n |
| met Centrum | 0,46001<br>278,7523<br>9,97535<br>9,51534 |
| | 1,71593 |
| Basis Zuid | |
| − 42,643<br>− 41,137<br>1,62985n<br>1,61423n | |
| 0,01562<br>251,1446<br>9,85715<br>9,84153 | |
| 1,77270 | |

# Berekening van de basislengte in stereografische projectie.

## Hulpberekeningen.

*In Basis Zuid*

| | | | | | gem | Nadir afstand |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basis Noord (p^t loodstaaf) | I | 268° 9′ 0″ | 18′30″ | | 268° 13′ 45″ | |
| | II | 87 31 0 | 41 0 | | 87 36 0 | |
| | | | | | 180 37 45 | 90° 18′ 52″ |
| **Hoogtemeting** idem | II | 87 31 30 | 41 0 | | 87 36 15 | 90 18 52 |
| | I | 268 9 0 | 19 0 | | 268 14 0 | |
| | | | | | 180 37 45 | 90 18 52 gem. |

II^e as boven bovenvl. driep. B.Z. = 0,126 m.
p^t loodstaaf " " " B.N. = 0.126 "

Elevatie 0° 18′ 52″

*Basis N. - Basis Z.*

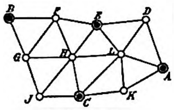
| | | |
|---|---|---|
| **Basismeting** | 25,0100 | 25,0200 |
| | 0,0540 | 0,0639 |
| | 24,9560 | 24,9561 |
| temperatuur 15° C. | 25,0300 | 25,0400 |
| | 0,0741 | 0,0839 |
| | 24,9559 | 24,9561 |
| gem.^d | | 24,9560 m |

| | | | |
|---|---|---|---|
| log | 24,9560 | = | 1,397175 |
| corr. | s | = | + 97 |
| id. | t | = | 0 |
| id. | h | = | − 6 |
| id. | m | = | − 20 |
| **Log basislengte in ster. proj.** | | = | 1,397246 |

N.B. s = spanningscorrectie voor den meetband
t = temperatuurs correctie
h = correctie voor het hoogteverschil = −(1 − log cos. elevatie)
m = vergrooting stereogr. projectie in het station van meting

## Overbepaalde Affine Aansluiting

Schets van het Driehoeksnet




A, B, C en E zijn de Aansluitingspunten

| Gegeven Stelsel X | Gegeven Stelsel Y | Aansl. punten | Nieuwe Stelsel X' | Nieuwe Stelsel Y' | X-X' | Y-Y' |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 54849,730 | x 90024,620 | A | 54849,730 | x 90024,620 | 0,0000 | 0,0000 |
| 50626,240 | x 88720,410 | B | 50626,240 | x 88720,410 | 0,0000 | 0,0000 |
| 53746,749 | x 88243,410 | C | 53746,830 | x 88243,360 | −0,0810 | +0,0500 |
| 52718,087 | x 90000,816 | E | 52718,060 | x 90000,660 | +0,0270 | +0,1560 |
| 52985,2015 | x 89247,314 | Z | 52985,215 | x 89247,262[5] | −0,0135 | +0,0515 |
| $\overline{X}$ | $\overline{Y}$ | | Nà vereffening X'+v | Y'+w | $\overline{X}-\overline{X}'$ | $\overline{Y}-\overline{Y}'$ |
| 1864,5285 | 777,306 | A | 54849,733 | x 90024,555 | +0,0135 | −0,0515 |
| x 7641,0385 | x 9473,096 | B | 50626,242 | x 88720,361 | +0,0135 | −0,0515 |
| 761,5475 | x 8996,096 | C | 53746,828 | x 88243,395 | −0,0675 | −0,0015 |
| x 732,8666 | 753,502 | E | 52718,056 | x 90000,739 | +0,0405 | +0,1045 |
| 00000,0000 | 00000,000 | | | | 0,0000 | 0,0000 |

$v = \overline{X}-\overline{X}' + \overline{X}\Delta a_1 + \overline{Y} b_1$

$w = \overline{Y}-\overline{Y}' + \overline{X} a_2 + \overline{Y}\Delta b_2$

$\Delta\overline{X} = \overline{X}-\overline{X}'$ ; $\Delta\overline{Y} = \overline{Y}-\overline{Y}'$

$v, w, \Delta\overline{X}$ en $\Delta\overline{Y}$ in mm
$\overline{X}$ en $\overline{Y}$ in dekameters

Onbekenden zijn dus:

$\Delta a_1 \cdot 10^4$, $b_1 10^4$, $a_2 10^4$, $\Delta b_2 10^4$

$X_z = \frac{[X_i]}{n}$ ; $\overline{X}_i = X_i - X_z$ | $Y_z = \frac{[Y_i]}{n}$ ; $\overline{Y}_i = Y_i - Y_z$

### Correctievergelijkingen, enz.

| Punten | $\overline{X}$ | $\overline{Y}$ | $\Delta\overline{X}=\overline{X}-\overline{X}'$ | $\Delta\overline{Y}=\overline{Y}-\overline{Y}'$ | s | $\Delta a_1\overline{X}$ | $b_1\overline{Y}$ | v | vv | $a_2\overline{X}$ | $\Delta b_2\overline{Y}$ | w | ww |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | +187 | +78 | +13,5 | −51,5 | +227,0 | +31,1 | −41,5 | +3,1 | 9,6 | +11,4 | −24,7 | −64,8 | 4199 |
| B | −236 | −53 | +13,5 | −51,5 | −327,0 | −39,3 | +28,2 | +2,4 | 5,8 | −14,4 | +16,8 | −49,1 | 2411 |
| C | +76 | −100 | −67,5 | −1,5 | −93,0 | +12,6 | +53,2 | −1,7 | 2,9 | +4,7 | +31,7 | +34,9 | 1218 |
| E | −27 | +75 | +40,5 | +104,5 | +193,0 | −4,5 | −39,9 | −3,9 | 15,2 | −1,7 | −23,8 | +79,0 | 6241 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −0,1 | 0,0 | −0,1 | 33,5 | 0,0 | 0.0 | 0,0 | 14069 |

$m^2 = \frac{[vv]+[ww]}{2}$

m = 84,0

### Coëfficiënten der Normaalvergelijkingen

| | $\overline{X}]$ | $\overline{Y}]$ | $\Delta\overline{X}]$ | $\Delta\overline{Y}]$ | s] |
|---|---|---|---|---|---|
| $[\overline{X}$ | +97170 | +17469 | −6885 | −412 | +107342 |
| $[\overline{Y}$ | +17469 | +24518 | +10125 | +6700 | +58812 |
| $\Delta\overline{X}$ | −6885 | +10125 | +6561 | +2943 | +12744 |
| $\Delta\overline{Y}$ | −412 | +6700 | +2943 | +16227 | +25458 |
| [s | +107342 | +58812 | +12744 | +25458 | +204356 |

### Normaalvergelijkingen

$[\overline{X}\overline{X}]\,\Delta a_1 + [\overline{X}\overline{Y}]\,b_1 + [\overline{X}\Delta\overline{X}] = 0$
$[\overline{X}\overline{Y}]\,\Delta a_1 + [\overline{Y}\overline{Y}]\,b_1 + [\overline{Y}\Delta\overline{X}] = 0$

$[\overline{X}\overline{X}]\,a_2 + [\overline{X}\overline{Y}]\,\Delta b_2 + [\overline{X}\Delta\overline{Y}] = 0$
$[\overline{X}\overline{Y}]\,a_2 + [\overline{Y}\overline{Y}]\,\Delta b_2 + [\overline{Y}\Delta\overline{Y}] = 0$

$+97170\,\Delta a_1 + 17469\,b_1 - 6885 = 0$
$+17469\,\Delta a_1 + 24518\,b_1 + 10125 = 0$

$+97170\,a_2 + 17469\,\Delta b_2 - 412 = 0$
$+17469\,a_2 + 24518\,\Delta b_2 + 6700 = 0$

De Oplossing geeft weer:

$\Delta a_1 \cdot 10^4 = +0,16641$
$b_1 \cdot 10^4 = -0,53153$

$a_2 \cdot 10^4 = +0,06121$
$\Delta b_2 \cdot 10^4 = -0,31688$

### Affine Transformatie. Berekening der Coördinaten

Formules

$X'_{n+1} = X'_n + X_{n+1} - X_n + \Delta a_1 (X_{n+1} - X_n) + b_1 (Y_{n+1} - Y_n)$

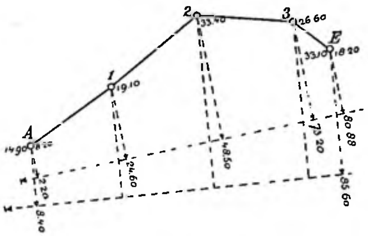
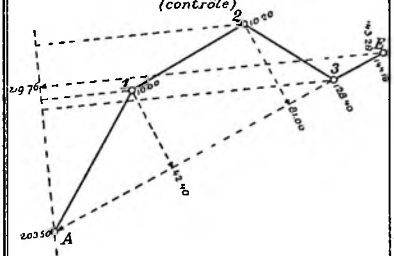
$Y'_{n+1} = Y'_n + Y_{n+1} - Y_n + a_2 (X_{n+1} - X_n) + \Delta b_2 (Y_{n+1} - Y_n)$

$\Delta a_1 = +0,16641 \cdot 10^{-4}$
$b_1 = -0,53153 \cdot 10^{-4}$
$a_2 = +0,06121 \cdot 10^{-4}$
$\Delta b_2 = -0,31688 \cdot 10^{-4}$

| Gegeven Stelsel $X_n$ / $X_{n+1}-X_n$ / $X_{n+1}$ | Gegeven Stelsel $Y_n$ / $Y_{n+1}-Y_n$ / $Y_{n+1}$ | Punten | Nieuwe Stelsel $X'_n$ / $X_{n+1}-X_n$ / $\Delta a_1(X_{n+1}-X_n)$ / $b_1(Y_{n+1}-Y_n)$ / $X'_{n+1}$ | Nieuwe Stelsel $Y'_n$ / $Y_{n+1}-Y_n$ / $a_2(X_{n+1}-X_n)$ / $\Delta b_2(Y_{n+1}-Y_n)$ / $Y'_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 52985,202<br>1846,528 | x 89247,314<br>777,306 | Z | 52985,215<br>1864,528<br>0,031<br>x,959 | x 89247,262<br>777,306<br>0,011<br>x,975 |
| 54849,730<br>x 5776,510 | x 90024,620<br>x 8695,790 | A | 54849,733<br>x 5776,510<br>x,930<br>0,069 | x 90024,554<br>x 8695,790<br>x,974<br>0,041 |
| 50626,240<br>.3120,509 | x 88720,410<br>x 523,000 | B | 50626,242<br>3120,509<br>0,052<br>0,025 | x 88720,359<br>x 523,000<br>0,019<br>0,015 |
| 53746,749<br>x 8971,338 | x 88243,410<br>1757,406 | C | 53746,828<br>x 8971,338<br>x,983<br>x,907 | x 88243,393<br>1757,406<br>x,994<br>x,944 |
| 52718,087<br>267,115 | x 90000,816<br>x 246,498 | E | 52718,056<br>267,115<br>0,004<br>0,040 | x 90000,737<br>x 246,498<br>0,002<br>0,024 |
| 52985,202 | x 89247,314 | Z | 52985,215 | x 89247,261 |

| Gegeven Stelsel | | Punten | Nieuwe Stelsel | |
|---|---|---|---|---|
| 52985,202<br>1097,050 | x 89247,314<br>1776,728 | Z | 52985,215<br>1097,050<br>0,018<br>x,906 | x 89247,261<br>1776,728<br>0,007<br>x,943 |
| 54082,252<br>x 8881,927 | x 91024,042<br>x 7924,564 | D | 54082,189<br>x 8881,927<br>x,982<br>0,110 | x 91023,939<br>x 7924,564<br>x,993<br>0,066 |
| 52964,179<br>1148,856 | x 88948,606<br>898,924 | H | 52964,208<br>1148,856<br>0,019<br>x,952 | x 88948,562<br>898,924<br>0,007<br>x,972 |
| 54113,035<br>x 7847,120 | x 89847,530<br>x 8269,324 | L | 54113,035<br>x 7847,120<br>x,964<br>0,092 | x 89847,465<br>x 8269,324<br>x,987<br>0,055 |
| 51960,155<br>2698,755 | x 88116,854<br>1084,613 | G | 51960,211<br>2698,755<br>0,045<br>x,942 | x 88116,831<br>1084,613<br>0,017<br>x,966 |
| 54658,910<br>x 8200,405 | x 89201,467<br>x 8338,771 | K | 54658,953<br>x 8200,405<br>x,970<br>0,088 | x 89201,427<br>x 8338,771<br>x,989<br>0,052 |
| 52859,315<br>x 8993,702 | x 87540,238<br>2099,805 | J | 52859,416<br>x 8993,702<br>x,983<br>x,888 | x 87540,239<br>2099,805<br>x,994<br>x,933 |
| 51853,017<br>x 8773,223 | x 89640,043<br>x 9080,367 | F | 51852,989<br>x 8773,223<br>x,980<br>0,049 | x 89639,971<br>x 9080,367<br>x,992<br>0,029 |
| 50626,240 | x 88720,410 | B | 50626,242 | x 88720,359 |

## Omrekenen van loodlijnen op een andere meetlijn

| $l^2=(X_E-X_A)^2+(Y_E-Y_A)^2;\ l'^2=(X'_E-X'_A)^2+(Y'_E-Y'_A)^2$<br>$p=\{(X_E-X_A)(X'_E-X'_A)+(Y_E-Y_A)(Y'_E-Y'_A)\}:l^2$<br>$q=\{(X_E-X_A)(Y'_E-Y'_A)-(Y_E-Y_A)(X'_E-X'_A)\}:l^2$<br>$p^2+q^2=l'^2:l^2$ | $X_n$<br>$X_{n+1}$<br>– – – –<br>$X_E-X_A$ | $Y_n$<br>$Y_{n+1}$<br>– – – –<br>$Y_E-Y_A$ | Punten | $X'_n$<br>$p(X_{n+1}-X_n)$<br>$-q(Y_{n+1}-Y_n)$<br>$X'_{n+1}$<br>– – – –<br>$X'_E-X'_A$ | $Y'_n$<br>$p(Y_{n+1}-Y_n)$<br>$+q(X_{n+1}-X_n)$<br>$Y'_{n+1}$<br>– – – –<br>$Y'_E-Y'_A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l'^2=6291,0800;\ l^2=6290,5424$<br>$p=+0,994524;\ q=+0,104916$ | 2,20 | 8,20 | A | 8,40<br>22,277<br>x 8,856 | 14,90<br>2,350<br>10,640 |
| $p^2+q^2=1,000085=l'^2:l^2$<br>(contrôle) | 24,60 | 19,10 | 1 | 29,533<br>23,769<br>x 8,500 | 28,090<br>14,222<br>2,507 |
|  | 48,50 | 33,40 | 2 | 51,802<br>24,565<br>0,713 | 44,819<br>x 3,237<br>2,591 |
| | 73,20 | 26,60 | 3 | 77,080<br>7,638<br>0,881 | 40,647<br>x 1,646<br>0,806 |
| | 80,88 | 18,20 | E | 85,60 | 33,10 |
| | + 78,68 | + 10,00 | | + 77,20 | + 18,20 |
| $l'^2=20793.55\ ;\ l^2=20787.87$<br>$p=+0.112776\ ;\ q=-0.993756$ | 0.00 | 0.00 | A | 203.50<br>4,782<br>9.937 | 0.00<br>1.128<br>x 57.865 |
| $p^2+q^2=1.000272=l'^2\ l^2$<br>(contrôle) | 42,40 | 10.00 | 1 | 218.219<br>4,353<br>0.199 | x 58.993<br>0,023<br>x 61,641 |
|  | 81,00 | 10,20 | 2 | 222,771<br>5,346<br>x 89,864 | x 20,657<br>x 8,850<br>x 52,896 |
| | 128,40 | 0.00 | 3 | 217,981<br>1,780<br>0,000 | x 872,403<br>0.000<br>x 84,318 |
| | 144,18 | 0.00 | E | 219.76 | x 856,72 |
| | +144,18 | 0.00 | | + 16,26 | – 143,28 |
| | | | | | |

# Aansluiting aan 2 punten – Gelijkvormigheidstransformatie

$$p = \lambda \cos \omega = \frac{(X_b - X_a)(X'_b - X'_a) + (Y_b - Y_a)(Y'_b - Y'_a)}{l^2}$$

$$q = \lambda \sin \omega = \frac{(X_b - X_a)(Y'_b - Y'_a) - (Y_b - Y_a)(X'_b - X'_a)}{l^2}$$

$$\lambda = \frac{l'}{l} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

$$\omega = \psi ab - \psi' ab$$

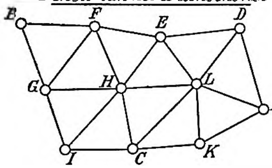
$$l^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$$

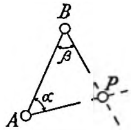
| $l^2$<br>$p$<br>$q$<br>$\lambda^2 = p^2 + q^2$<br>$\lambda$ | Gegeven stelsel<br>$X_n$<br>$X_{n+1} - X_n$<br>$X_{n+1}$ | <br>$Y_n$<br>$Y_{n+1} - Y_n$<br>$Y_{n+1}$ | Punten | Nieuwe stelsel<br>$X'_n$<br>$+p(X_{n+1} - X_n)$<br>$-q(Y_{n+1} - Y_n)$<br>$X'_{n+1}$ | <br>$Y'_n$<br>$+p(Y_{n+1} - Y_n)$<br>$+q(X_{n+1} - X_n)$<br>$Y'_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l^2$ = 20659654 | +4208.819 | +1676.600 | A | 54849,730<br>9,007<br>x223,515 | x0024,620<br>992,374<br>7,048 |
| $p$ = +0,7659037<br>$q$ = +0,5992827<br>$\lambda^2$ = 0,945744 | 4220.579 | 2972.290 | D | 54082,252<br>x8657,270<br>x78,565 | x1024,042<br>27,395<br>x8949,379 |
| $\lambda$ = 0,972493 | 2467.448 | 3008.058 | E | 52718,087<br>x288,342<br>x846,588 | x0000,816<br>196,065<br>x443,162 |
| | 1538,274 | 3264,050 | F | 51853,017<br>x8792,762<br>x80,460 | x89640,043<br>24,973<br>x055,394 |
| | x62,047 | 3296,656 | B | 50626,240 | x88720,410 |
| | −4246,772 | +1620,056 | | −4223,490 | −1304,210 |
| | x62,047 | 3296.656 | B | 50626,240<br>534,454<br>799,462 | x88720,410<br>x8978,261<br>418,184 |
| | 659.855 | 1962,625 | G | 51960,156<br>277,866<br>621,293 | x88116,855<br>x205,966<br>217,417 |
| | 1022.650 | 925,897 | I | 52859,315<br>891,704<br>x5,730 | x87540,238<br>5,457<br>697,715 |
| | 2196,901 | 933,022 | C | 53746,749<br>1030,742<br>x881,419 | x88243,410<br>151,551<br>806,506 |
| | 3532,687 | 1130,894 | K | 54658,910<br>517,852<br>x672,968 | x89201,467<br>417,958<br>405,194 |
| | 4208.819 | 1676.600 | A | 54849,730<br>x457,113<br>x806,192 | x90024,620<br>247,693<br>x575,217 |
| | 3500,000 | 2000.000 | L | 54113,035<br>x8851,144<br>0,000 | x89847,530<br>0.000<br>x101,076 |
| | 2000,000 | 2000,000 | H | 52964,179<br>x8973,578<br>22,398 | x88948,606<br>x71,374<br>x196,874 |
| | 659,855 | 1962,625 | G | 51960,155 | x88116,854 |

## Berekening van de coördinaten der punten in een vereffend driehoeksnet

### Voorwaartsche insnijding Berekening met machine

Schets van het Driehoeksnet




Formules:

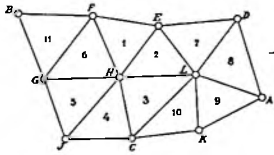
$$X_b - X_a = Y_a \cot\beta + Y_b \cot\alpha - Y_p(\cot\alpha + \cot\beta)$$

$$Y_a - Y_b = X_a \cot\beta + X_b \cot\alpha - X_p(\cot\alpha + \cot\beta)$$

| B<br>A<br>P | α<br>β | cot α<br>cot β<br>cot α + cot β | $X_b$<br>$X_a$<br>$X_b - X_a$<br>$X_p$ | $Y_b$<br>$Y_a$<br>$Y_a - Y_b$<br>$Y_p$ |
|---|---|---|---|---|
| H<br>L<br>E | 49.2359<br>72.3581 | +1,024298<br>+0.463712<br>+1,488010 | +2000.000<br>+3500.000<br>×8500.000<br>2467.448 | +2000.000<br>+2000,000<br>0.000<br>3008,058 |
| E<br>L<br>D | 91.3671<br>47.9372 | +0,136442<br>+1,066999<br>+1,203441 | 2467.448<br>3500,000<br>×8967.448<br>4220.579 | 3008.058<br>2000,000<br>×8991,942<br>2972,290 |
| D<br>L<br>A | 86.6469<br>40.0252 | +0,212881<br>+1,375237<br>+1,588118 | 4220,579<br>3500,000<br>720.579<br>4208.819 | 2972,290<br>2000,000<br>×9027,710<br>1676,600 |
| A<br>L<br>K | 70.3569<br>70.4799 | +0.502484<br>+0.500066<br>+1,002550 | 4208.819<br>3500,000<br>708.819<br>3532.687 | 1676.600<br>2000,000<br>323,400<br>1130.894 |
| K<br>L<br>C | 58.9531<br>106.9005 | +0.751974<br>−0,108819<br>+0.643155 | 3532687<br>3500,000<br>32,687<br>2186.901 | 1130.894<br>2000,000<br>869,106<br>933,022 |
| C<br>L<br>H | 43,4401<br>67.5993 | +1,230671<br>+0,557979<br>+1.788650 | 2186.901<br>3500,000<br>×8686.901<br>2000,002 | 933.022<br>2000,000<br>1066.978<br>2000,000 |
| C<br>H<br>I | 58.0393<br>89.3500 | +0.774691<br>+0,168868<br>+0,943559 | 2186.901<br>2000,000<br>186.901<br>1022.650 | 933,022<br>2000,000<br>1066.978<br>925.897 |
| I<br>H<br>G | 51.2253<br>68,4298 | +0,962229<br>+0,540995<br>+1,503224 | 1022.650<br>2000,000<br>×9022,650<br>659.855 | 925.897<br>2000.000<br>1074.103<br>1962.625 |
| G<br>H<br>F | 79.4794<br>60.4272 | +0.333984<br>+0.716340<br>+1.050324 | 659.855<br>2000.000<br>×8659.855<br>1538.274 | 1962.625<br>2000.000<br>37.375<br>3264.050 |
| F<br>H<br>E | 49.9373<br>60.5896 | +1.001973<br>+0.712486<br>+1.714459 | 1538.274<br>2000.000<br>×9538.274<br>2467.444 | 3264.050<br>2000.000<br>×8735.950<br>3008.056 |
| G<br>F<br>B | 63.5189<br>68.4792 | +0.645271<br>+0.539992<br>+1,185263 | 659.855<br>1538.274<br>×9121.581<br>×62.047 | 1962.625<br>3264.050<br>1301.425<br>3296.656 |
| F<br>B<br>G | 68.0019<br>63.5189 | +0.549716<br>+0.645271<br>+1.194987 | 1538.274<br>×62.047<br>1576.227<br>659.854 | 3264.050<br>3296.656<br>32.606<br>1962.624 |

**Kadaster**
9934 - 57 - '38

# VEREFFENING VAN DE HOEKEN VAN HET DRIEHOEKSNET VOLGENS DE COTANGENTENMETHODE




Schets van het Driehoeksnet

H en L zijn Centrale punten.

| Nr v/d Driehoek | Hoekpunten | Gemeten Hoeken | Cotangenten | 1e Correctie | Hoeken + 1e Correctie | Correctie H | Correctie H | Correctie S, | Correctie S, | Totaal correctie | Definitief vereffende Hoeken | Totale Correctie |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | H | 49,9367 | +1,0020 | + 2 | 49,9369 | + 4.3 | | | | + 4.3 | 49.9373 | + 6 |
| | E | 89.4719 | −0,1669 | + 11 | 89.4730 | − 3.5 | | + 4.0 | | + 0.5 | 89.4731 | + 17 |
| | F | 60.5898 | +0.7125 | + 3 | 60.5901 | − 0.8 | | − 4.0 | | − 4.8 | 60.5896 | − 1 |
| | | 199.9984 (+16) | | + 16 | 200.0000 | | | | | | 200.0000 | + 16 |
| 2 | H | 72.3576 | +0,4637 | − 12 | 72,3564 | + 6,8 | + 1,6 | | + 7.9 | +16.3 | 72,3581 | + 5 |
| | L | 49,2365 | +1,0243 | − 5 | 49.2360 | − 1.7 | − 2.9 | + 4.0 | | − 0.6 | 49,2359 | − 6 |
| | E | 78.4091 | +0,3578 | − 15 | 78.4076 | − 5.1 | + 1,3 | − 4.0 | − 7.9 | −15.7 | 78.4060 | − 31 |
| | | 200,0032 (−32) | | − 32 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | − 32 |
| 3 | H | 88,9620 | +0,1751 | − 17 | 88,9603 | + 8,8 | + 2,0 | | − 7.9 | + 2,9 | 88,9606 | − 14 |
| | C | 67.5992 | +0,5580 | − 5 | 67.5987 | − 6,1 | + 0,6 | + 4,0 | + 7.9 | + 6.4 | 67.5993 | + 1 |
| | L | 43,4413 | +1,2306 | − 3 | 43,4410 | − 2,7 | − 2,6 | − 4.0 | | − 9,0 | 43,4401 | − 12 |
| | | 200,0025 (−25) | | − 25 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | − 25 |
| 4 | H | 58,0385 | +0,7747 | + 3 | 58,0388 | + 5,4 | | | | + 5,4 | 58,0393 | + 8 |
| | J | 52,6102 | +0,9212 | + 2 | 52,6104 | − 0,8 | | + 4,0 | | + 3,2 | 52,6107 | + 5 |
| | C | 89,3494 | +0,1669 | + 14 | 89,3508 | − 4,6 | | − 4,0 | | − 8,6 | 89,3500 | + 6 |
| | | 199.9981 (+19) | | + 19 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | + 19 |
| 5 | H | 51,2244 | +0,9623 | + 5 | 51,2249 | + 4,2 | | | | + 4,2 | 51,2253 | + 9 |
| | G | 80,3430 | +0,3190 | + 17 | 80,3447 | − 2,6 | | + 4,0 | | + 1,4 | 80,3449 | + 19 |
| | J | 68,4294 | +0,5410 | + 10 | 68,4304 | − 1,6 | | − 4,0 | | − 5,6 | 68,4298 | + 4 |
| | | 199.9968 (+32) | | + 32 | 200,0000 | | | | | | 2000000 | + 32 |
| 6 | H | 79.4788 | +0,3340 | − 1 | 79,4787 | + 7,1 | | | | + 7,1 | 79.4794 | + 6 |
| | F | 60,0933 | +0,7243 | 0 | 60,0933 | − 3,5 | | + 4,0 | | + 0,5 | 60,0934 | + 1 |
| | G | 60,4281 | +0,7163 | − 1 | 60,4280 | − 3,6 | | − 4,0 | | − 7,6 | 60,4272 | − 9 |
| | | 200,0002 (−2) | | − 2 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | − 2 |
| 7 | L | 91,3654 | +0,1365 | + 23 | 91,3677 | | − 6,4 | | | − 6,4 | 91,3671 | + 17 |
| | D | 60,6957 | +0,7100 | + 4 | 60,6961 | | + 3,8 | | − 7,9 | − 4,1 | 60,6957 | 0 |
| | E | 47,9359 | +1,0670 | + 3 | 47,9362 | | + 2,6 | | + 7,9 | +10,5 | 47,9372 | + 13 |
| | | 199.9970 (+30) | | + 30 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | + 30 |
| 8 | L | 86,6452 | +0,2129 | + 23 | 86,6475 | | − 6,5 | | | − 6,5 | 86,6469 | + 17 |
| | A | 73,3271 | +0,4453 | + 11 | 73,3282 | | + 4,9 | | − 7,9 | − 3,0 | 73,3279 | + 8 |
| | D | 40,0239 | +1,3753 | + 4 | 40,0243 | | + 1,6 | | + 7,9 | + 9,5 | 40,0252 | + 13 |
| | | 199.9962 (+38) | | + 38 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | + 38 |
| 9 | L | 70,3590 | +0,5024 | − 16 | 70,3574 | | − 4,5 | | | − 4,5 | 70,3569 | − 21 |
| | K | 59,1649 | +0,7468 | − 11 | 59,1638 | | + 1,8 | | − 7,9 | − 6,1 | 59,1632 | − 17 |
| | A | 70,4804 | +0,5001 | − 16 | 70,4788 | | + 2,7 | | + 7,9 | +10,6 | 70,4799 | − 5 |
| | | 200,0043 (−43) | | − 43 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | − 43 |
| 10 | L | 58,9539 | +0,7520 | − 2 | 58,9537 | | − 5,6 | | | − 5,6 | 58,9531 | − 8 |
| | C | 34,1473 | +1,6820 | − 1 | 34,1472 | | − 0,4 | | − 7,9 | − 8,3 | 34,1464 | − 9 |
| | K | 106,8976 | −0,1008 | + 15 | 106,8991 | | + 6,0 | | + 7,9 | +13,9 | 106,9005 | + 29 |
| | | 199.9980 (+12) | | + 12 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | + 12 |

| Nr v/d Driehoek | Hoekpunten | Gemeten Hoeken | Cotangenten | 1e Correctie | Hoeken + 1e Correctie | Correctie H | Correctie H | Correctie S, | Correctie S, | Totaal correctie | Definitief vereffende Hoeken | Totale Correctie |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | B | 68,0019 | +0,5497 | 0 | 68,0019 | | | | | | 68,0019 | 0 |
| | G | 68,4793 | +0,5400 | − 1 | 68,4792 | | | | | | 68,4792 | − 1 |
| | F | 63,5189 | +0,6455 | 0 | 63,5189 | | | | | | 63,5189 | 0 |
| | | 200,0001 (−1) | | − 1 | 200,0000 | | | | | | 200,0000 | − 1 |

## Berekening van Sluitfouten

| Horizont Vergelijkingen | Sinusvergelijkingen: Hoeken rechts | Log Sinus | Hoeken links | Log Sinus |
|---|---|---|---|---|
| **Centraalpunt H** | | | | |
| hoek 1 49.9369 | 89.4730 | 9.9940350 | 60.5901 | 9.9108545 |
| 2 72.3564 | 49.2360 | 9.8442100 | 78.4076 | 9.9745252 |
| 3 88.9603 | 67.5987 | 9.9411401 | 43.4410 | 9.7997774 |
| 4 58.0388 | 52.6104 | 9.8665815 | 89.3508 | 9.9938954 |
| 5 51.2249 | 80.3447 | 9.9789637 | 68.4304 | 9.9442575 |
| 6 79.4787 | 60.0933 | 9.9084192 | 60.4280 | 9.9100642 |
| 399.9960 | Σ Log aan R | 9.5333349.2 | Σ Log aan L | 9.5333744 |
| $wh_1$ = + 40 | | 9.5333744.4 | | |
| | | $wo_1$ = − 395.2 × ρ″ × M = − 36″.94 | | |
| **Centraalpunt L** | | | | |
| hoek 2 49,2360 | 78,4076 | 9.9745252 | 72.3564 | 9.9597013 |
| 3 43.4410 | 88,9603 | 9.9934373 | 67.5987 | 9.9411403 |
| 7 91.3677 | 60,6961 | 9.9113683 | 47.9362 | 9.8349393 |
| 8 86.6475 | 73,3282 | 9.9607144 | 40.0243 | 9.7694464 |
| 9 70.3574 | 59,1638 | 9.9037554 | 70.4788 | 9.9515299 |
| 10 58.9537 | 34,1472 | 9.7084468 | 106.8991 | 9.9974445 |
| 400,0033 | Σ Log aan R | 9.4522747.6 | Σ Log aan L | 9.4522024 |
| $wh_2$ = − 33 | | 9.4522702.1 | | |
| | | $wo_2$ = + 455 × ρ″ × M = + 66″.70 | | |

## Berekening van de Coefficienten der Normaalvergelijkingen

| Som der Cotangenten v/d omhullende hoeken | − cot $\mathcal{E}_1$ − cot $C_3$ − cot $\mathcal{E}_1$ − cot $C_3$ |
|---|---|
| 0.8794 | −0,3528 |
| 1.3771 | −0,5580 |
| 1.7886 | −0,9108 |
| 1.0901 | ($p_{12}$) |
| 0.8600 | |
| 1.4406 | |
| 7.4358 | |
| ($p_{11}$) | |
| 0.8165 | |
| 0.7331 | |
| 1.7770 | |
| 1.8206 | |
| 1.2469 | |
| 1.5732 | |
| 7.9673 | |
| ($p_{22}$) | |

## Normaalvergelijkingen

### Algemeene vorm

a Horizontvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} p_{11} H_1 + p_{12} H_2 &= wh_1 \\ p_{12} H_1 + p_{22} H_2 &= wh_2 \end{aligned}\right\}$$

b Sinusvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} p_{11} S_1 + p_{12} S_2 &= wo_1 \\ p_{12} S_1 + p_{22} S_2 &= wo_2 \end{aligned}\right\}$$

## Oplossing der Normaalvergelijkingen

$$a \left\{\begin{aligned} 7.4358\,H_1 - 0{,}9108\,H_2 &= +\ 40 \\ -0{,}9108\,H_1 + 7{,}9673\,H_2 &= -\ 33 \end{aligned}\right.$$

$$b \left\{\begin{aligned} 7.4358\,S_1 - 0.9108\,S_2 &= -\ 36.94 \\ -0.9108\,S_1 + 7.9673\,S_2 &= +\ 66.70 \end{aligned}\right.$$

Op de bekende wijze worden hieruit de volgende betrekkingen verkregen

$$\left(7.4358 - \frac{0.9108^2}{7.9673}\right) H_1 = +40 - \frac{33 \times 0.9108}{7.9673}$$

$$\left(7.9673 - \frac{0.9108^2}{7.4358}\right) H_2 = -33 + \frac{40 \times 0.9108}{7.4358}$$

en

$$\left(7.4358 - \frac{0.9108^2}{7.9673}\right) S_1 = -36.94 + \frac{66.70 \times 0.9108}{7.9673}$$

$$\left(7.9673 - \frac{0.9108^2}{7.4358}\right) S_2 = +66.70 - \frac{36.94 \times 0.9108}{7.4358}$$

waaruit volgen de waarden der Correlaten

$H_1$ = + 4.9

$H_2$ = − 3.6

$S_1$ = − 4.0

$S_2$ = + 7.9

## Controleberekeningen

| | Hor. vergelijkingen | Hoeken rechts | Log sinus | Hoeken links | Log sinus |
|---|---|---|---|---|---|
| Centraalpunt H | hoek 1 49.9373 | 89.4731 | 9.994035 | 60.5896 | 9.910852 |
| | 2 72.3581 | 49.2359 | 9.844209 | 78.4060 | 9.974521 |
| | 3 88.9606 | 67.5993 | 9.941142 | 43.4401 | 9.799770 |
| | 4 58.0393 | 52.6107 | 9.866583 | 89.3500 | 9.993894 |
| | 5 51.2253 | 80.3449 | 9.978964 | 68.4298 | 9.944255 |
| | 6 79.4794 | 60.0934 | 9.908420 | 60.4272 | 9.910060 |
| | 400,0000 | | 9.533353 | | 9.533352 |
| Centraalpunt L | hoek 2 49.2359 | 78,4060 | 9.974521 | 72.3581 | 9.957707 |
| | 3 43.4401 | 88,9606 | 9.993438 | 67.5993 | 9.941142 |
| | 7 91.3671 | 60,6957 | 9.911366 | 47.9372 | 9.834947 |
| | 8 86.6469 | 73.3279 | 9.960714 | 40.0252 | 9.769455 |
| | 9 70.3569 | 59,1632 | 9.903752 | 70.4799 | 9.951534 |
| | 10 58.9531 | 34,1464 | 9.708438 | 106,9005 | 9.997444 |
| | 400,0000 | | 9.452229 | | 9.452229 |